PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

André Nascimento Pontes

QUANTIFICAÇÃO IRRESTRITA E GENERALIDADE ABSOLUTA: A questão da possibilidade de uma teoria sobre tudo

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Filosofia pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Ludovic Soutif

Rio de Janeiro
Agosto de 2015

André Nascimento Pontes

QUANTIFICAÇÃO IRRESTRITA E GENERALIDADE ABSOLUTA: A questão da possibilidade de uma teoria sobre tudo

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia do Centro de Teologia e Ciências Humanas da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Ludovic Soutif
Orientador
Departamento de Filosofia – PUC-Rio

Prof. Oswaldo Chateaubriand Filho
Departamento de Filosofia – PUC-Rio

Prof. Marco Antonio Caron Ruffino
Universidade de Campinas – UNICAMP

Prof. Guido Imaguire
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Prof. Paulo Augusto Silva Veloso
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Profa. Denise Berruezo Portinari
Coordenadora Setorial do Centro de Teologia e
Ciências Humanas – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 12 de agosto de 2015

André Nascimento Pontes

Graduado em Filosofia pela UFC (2007) e mestre em Filosofia também pela UFC (2010). Atualmente é Professor do Departamento de Filosofia da Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Ficha Catalográfica

Pontes, André Nascimento

Quantificação irrestrita e generabilidade absoluta: a questão da possibilidade de uma teoria sobre tudo / André Nascimento Pontes ; orientador: Ludovic Soutif. – 2015.

193 f. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia, 2015

Inclui bibliografia

1. Filosofia – Teses. 2. Lógica. 3. Quantificação. 4. Generalidade absoluta. 5. Extensibilidade indefinida. I. Soutif, Ludovic. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Filosofia. III. Título.

CDD: 100

A todos aqueles que acreditam no poder transformador do conhecimento, que não desencorajam o pensamento e estimulam a crítica honesta.

Não valorize nada que não possamos questionar.

Agradecimentos

Ao Professor Ludovic Soutif por suas críticas, sua leitura atenta e, sobretudo, por sua gentileza em comprar minhas ideias e aceitar orientar um projeto tão espinhoso. Sou imensamente grato por todo apoio e, sobretudo, amizade.

Aos Professores Luiz Carlos Pereira e Oswaldo Chateaubriand, por todos os ensinamentos ao longo das disciplinas do doutorado. Esse período constitui certamente uma experiência que muito contribuiu com minha formação.

Ao Professor Marco Ruffino, por aceitar participar da Banca de Defesa desta tese e, em seu profissionalismo, ter sido sempre um grande exemplo de cordialidade e dedicação à pesquisa filosófica.

Ao Professor Guido Imaguire, pelo apoio nos primeiros passos da caminhada que me trouxe até aqui, minha sincera gratidão. Agradeço também pela sempre agradável troca de ideias e a forma como inspira novos modos de pensar os velhos problemas filosóficos.

Ao Professor Paulo Veloso, por gentilmente aceitar participar da banca de defesa da presente tese.

Ao Martin, sempre um grande apoio em todos os momentos da minha vida carioca; isso inclui os bons e os não tão bons. Sem sua amizade tudo teria sido mais difícil. Entre muitas cervejas e discussões filosóficas, salvamo-nos todos.

Aos meus alunos Alisson Maurilo, Bruno Lomas e Hudson Benevides, que acreditaram no projeto de criação do Núcleo de Estudos em Lógica e Filosofia Analítica – NULFA na Universidade Federal do Amazonas e, com isso, me proporcionaram um agradável espaço de discussão de muitas das ideias contidas neste trabalho. Sou igualmente grato pela amizade e companheirismo dedicados em minha vida manauara. Me alegra dizer que sempre fizemos filosofia séria, porém sorrindo.

À minha "família republicana" Thiago, Alexandre "Naza" e Romildo, pois uma família, mesmo que "torta", ainda é uma família. Sou grato aos três pelo lar que me proporcionaram. Ao Thiago agradeço também as agradáveis discussões filosóficas e o apoio de amigo nas questões existenciais.

Ao Max, simplesmente por sua amizade; o que em nenhum momento foi pouca coisa.

Aos professores e amigos Tárik Prata e Verrah Chamma, pelas sempre agradáveis conversas sobre filosofia e o exótico mundo acadêmico.

À Edna Sampaio, secretária do Departamento de Filosofia, pelo modo gentil e paciente com que sempre esclareceu as dúvidas e resolveu os problemas burocráticos que permearam esses anos de doutorado.

Ao Departamento de Filosofia da UFAM, na figura de todos os meus colegas professores, por ter me proporcionado um ambiente de trabalho onde sempre tive liberdade de pesquisa. Isso foi fundamental ao longo da redação desta tese.

À CAPES que proporcionou as condições financeiras de realização do presente trabalho.

À Munique, por me ajudar a espalhar sementes de amor, por me ensinar todos os dias que mais vale um gosto do que cem mil réis e por me mostrar que, embora difícil, a vida também é *flicts*. Na minha jornada há muitos motivos que me fazem caminhar, mas 34 deles são especiais.

Ao meu pai, Raimundo, por ter me ensinado o amor aos livros, o espanto com a realidade e – tendo feito tudo isso – ter sido meu primeiro professor.

À minha mãe, Verônica, que durante anos tomou para si uma dura realidade trabalhando de maneira dedicada e exaustiva para que hoje tudo isso fosse possível.

Ao meu irmão Tiago Pontes, pela amizade e por toda história compartilhada. Forte é o laço que nem mesmo o tempo e a distância conseguem abalar.

À Aline, pela amizade incondicional e pelos dias brancos.

À Sandrinha, pela amizade, pelo carinho e pelas batatinhas. Há algumas pessoas que me tornam mais otimista com tudo o que é humano; você é uma delas.

Ao Sancho, companheiro de madrugadas e tardes acadêmicas, por todo o apoio afetivo imprescindível nos momentos de redação desta tese; com exceção das vezes em que soltavam fogos no bairro ou que um raio caía em meio a chuva, pois nesses momentos ele precisava latir ininterruptamente e dane-se o apoio.

Por fim, mas não menos importante, aos amigos que enchem de afeto meu caminho e assim me fazem acreditar: Alessandra Taveira, Ana Paula Porto Ferreira, Camila Nascimento, David Basílio, Eugênia Canto, Gilberto Brito, Melo, Nágila Pontes, Renato Almeida, Rosimeire Basílio, Sandro Soares.

Resumo

Pontes, André Nascimento; Soutif, Ludovic (Orientador). **Quantificação irrestrita e generalidade absoluta:** a questão da possibilidade de uma teoria sobre tudo. Rio de Janeiro, 2015. 193p. Tese de Doutorado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A presente tese tem como objetivo desenvolver uma discussão acerca das condições de possibilidade da quantificação irrestrita e existência da generalidade absoluta. O trabalho é dividido em quatro etapas. No primeiro capítulo, realizo, no âmbito da teoria dos modelos e teoria dos conjuntos, uma revisão do que chamo de *semântica padrão* dos quantificadores. A ideia básica é mostrar como, em tal semântica, quantificações estão associadas a domínios entendidos como conjuntos. Ao longo da tese, ficará patente que a semântica padrão impõe obstáculos intransponíveis ao tratamento formal de quantificações irrestritas. No segundo capítulo, apresento uma seleção do que considero os argumentos mais relevantes contra quantificações irrestritas e nossa capacidade de lidar formalmente com o que chamamos de generalidade absoluta. Alguns desses argumentos estão baseados em resultados tais como os paradoxos que Russell e Cantor derivaram na teoria dos conjuntos. No terceiro capítulo, apresento, de modo análogo, uma lista de argumentos agrupados em linhas de estratégias para reabilitar a quantificação irrestrita contra seus críticos. Além disso, desenvolvo uma discussão sobre os aspectos metafísicos do debate sobre o discurso a respeito da generalidade absoluta e sua correlação com argumentos por regresso ao infinito. Por fim, no quarto e último capítulo, desenvolvo um esboço geral de uma proposta alternativa de tratamento da quantificação irrestrita que apele para uma teoria paraconsistente dos conjuntos. Nela, as contradições obtidas na semântica padrão podem ser admitidas controladamente possibilitando assim a obtenção de domínios absolutos para quantificações. Essa proposta envolve a defesa de um sistema formal que seja inconsistente, porém dedutivamente não trivial. Em linhas gerais, o presente trabalho está pautado no seguinte conjunto de teses: (i) existe uma estreita correlação entre os obstáculos impostos pela semântica padrão às quantificações irrestritas e a estrutura de argumentos por regresso ao infinito; (ii) a existência de uma generalidade absoluta é um fenômeno que se impõe às nossas mais intuitivas concepções de realidade e, portanto, não devemos descredenciar o discurso sobre tal generalidade em virtude de limitações de nossas linguagens formais; (iii) nós devemos escolher entre assumir a lógica clássica e abdicar do discurso sobre a generalidade absoluta ou manter nossa intuição mais básica descrita em (ii) e abrir espaço para um tratamento não clássico da questão; finalmente, (iv) minha sugestão no presente trabalho é que temos boas razões para nos aventurar nas paisagens descritas pelos sistemas não clássicos.

Palavras-chave

Lógica; Quantificação; Generalidade Absoluta; Extensibilidade Indefinida.

Abstract

Pontes, André Nascimento; Soutif, Ludovic (Advisor). **Unrestricted quantification and absolute generality:** the issue of the possibility of a theory about everything. Rio de Janeiro, 2015. 193p. Doctoral These – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this doctoral dissertation, I tackle the issues of the conditions for the possibility of unrestricted quantification and of absolute generality. The text is framed as follows. The first chapter is devoted to reviewing what I call the *standard semantics* of quantifiers, within the realm of both model and set theories. In such semantics, the idea is, quantificational domains are conceived as sets. It will become clear along the way that, given this construal of quantificational domains, a formal treatment of unrestricted quantification faces insurmountable obstacles. The second chapter focuses on what I take to be the most relevant arguments against unrestricted quantification as well as against our ability to formally deal with so-called *absolute generality*. Some of them are based on results obtained by Russell and Cantor within set theory – the notorious Russell's paradox and Cantor's theorem. Analogously, in chapter three I review a number of grouped-into-strategic-lines arguments put forward to save unrestricted quantification against its critics. I also elaborate on the metaphysical aspects of the debate and its connections with infinite regress arguments. Lastly, in the fourth chapter I outline an alternative proposal based on paraconsistent set theory to deal with unrestricted quantification. On this approach, the contradictions found in standard semantics are admitted, yet in a controlled way, thus turning absolute quantificational domains available. The proposal is, basically, to allow the existence of inconsistent, yet deductively not trivial formal systems. The present work is broadly guided by the following set of claims: (i) there is a strong correlation between the obstacles set by standard semantics to unrestricted quantification and the structure of infinite regress arguments; (ii) absolute generality is a *phenomenon* that imposes itself upon our most intuitive conceptions of reality; accordingly, the limitations suffered by our formal languages ought not to lead us to bring such generality into disrepute; (iii) one must choose between adopting classical logic and renouncing to appeal to absolute generality or sticking to our most basic intuitions as described in (ii) and make room for a non-classical treatment of the issue; (iv) we have, after all, good reasons to venture into the landscapes described by the non-classical systems.

Keywords

Logic; Quantification; Absolute Generality; Indefinite Extensibility

Sumário

“Wait a minute! I thought that set theory was supposed to be a theory about all, ‘absolutely’ all, the collections that there were and that ‘set’ was synonymous with ‘collection’”

George Boolos

“*Faça-me um com tudo,* disse o monge budista ao cara do cachorro-quente.”

Autor desconhecido

Introdução

Talvez por transmitir a sensação de controle sobre um terreno desconhecido, mapas sempre me chamaram atenção. Toda longa jornada por caminhos desconhecidos e tortuosos pede um bom mapa. Por isso, antes de começar a jornada que os próximos capítulos conjuntamente representam, apresento ao leitor um pequeno "mapa" ou roteiro que, se construído com sucesso, poderá esclarecer muito do que segue e evitar alguns desvios de percurso frutos de más compreensões. Em primeiro lugar, é importante destacar que a presente tese de doutorado tem como objetivo central propor uma revisão e avaliação crítica do debate acerca da legitimidade de quantificações irrestritas, ou ainda, a legitimidade do discurso sobre absolutamente tudo o que há. Em outras palavras, o objetivo aqui é desenvolver uma investigação em parte lógica e em parte filosófica sobre as condições de possibilidade de afirmações que se pretendem absolutamente gerais. Embora a princípio a questão possa parecer truncada ao leitor não familiarizado, cada um desses termos técnicos serão definidos de maneira mais precisa durante os capítulos que se seguem.

Para que o leitor caminhe corretamente ao longo das próximas páginas, essas palavras iniciais sobre os objetivos deste trabalho devem ser lidas à luz das reais motivações presentes no problema da quantificação irrestrita e sua relação com a generalidade absoluta. Para isso, deve-se evitar a ingênua e errônea compreensão de que a expressão "teoria sobre tudo" que consta no subtítulo desta tese seja entendida como uma teoria que contenha respostas para todas as questões passíveis de serem formuladas. Isso seria simplesmente uma utopia quixotesca! Tampouco o que está em jogo é algo do tipo que os físicos têm em mente quando usam essa expressão, a saber, uma teoria unificada da realidade em seus aspectos macro e microscópicos. Ao mencionar aqui uma teoria sobre tudo, o que se tem em mente é uma teoria, em certo sentido consideravelmente mais modesta, que contenha afirmações pontuais – as quantificações irrestritas – que se pretendam verdadeiras para um domínio absoluto de objetos, ou ainda, verdadeiras para absolutamente tudo o que há. Por exemplo, em filosofia, essa pretensão é claramente levantada pela metafísica. No contexto da metafísica, princípios como o de auto identidade – *Tudo é idêntico a si mesmo* – são costumeiramente tomados como paradigmas de quantificações irrestritas. Muitas palavras serão ditas, especialmente no Capítulo II, sobre o âmbito teórico de aplicação das quantificações irrestritas.

Tendo expresso o que não pertence ao escopo dessa investigação, é importante agora dar uma caracterização mais direta do que pertence a esse escopo, ou ainda, em uma pergunta: O que realmente está em jogo no debate sobre quantificações irrestritas? De acordo com Uzquiano (2009: p.301), há duas questões distintas associadas ao tópico da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta que podem ser apresentadas da seguinte maneira:

(I) *A questão metafísica*: Há um domínio absoluto do discurso?
(II) *A questão linguística*: É possível realizar/expressar de maneira consistente quantificações irrestritas?

Por um lado, o que está em questão em (I) parece ser a legitimidade ou o estatuto ontológico de algo como o conjunto de tudo o que há operando como fundamento metafísico de um discurso absoluto. Por outro lado, (II) remete a uma investigação sobre a capacidade das nossas faculdades epistêmicas e linguísticas de formular sentenças com quantificações irrestritas. Aparentemente, uma resposta negativa para (I) deveria implicar uma resposta igualmente negativa para (II). De fato, um olhar mais simples para o problema parece apontar nessa direção. Inspirados na abordagem conjuntística da teoria dos modelos e em resultados obtidos no seio dessa abordagem, a exemplo do teorema de Cantor e do paradoxo de Russell, os oponentes de quantificações irrestritas defendem que é exatamente esse o caso: quantificações irrestritas são ilegítimas porque não existe algo como o conjunto de tudo o que há operando como o domínio dessas quantificações.

Não obstante, nos últimos anos, o refinamento da pesquisa em torno da legitimidade de quantificações irrestritas vem mostrando que o cenário é mais complexo do que se supunha inicialmente. Por um lado, é crescente o uso de teorias alternativas dos conjuntos ou mesmo semânticas não conjuntísticas para salvar a credibilidade de afirmações sobre totalidades irrestritas. Por outro lado, alguns teóricos, tendo Kit Fine como um dos exemplos mais ilustres, apresentaram resultados no sentido de mostrar que a questão da quantificação irrestrita e a questão da generalidade absoluta, apesar de correlatas, devem ser vista como questões distintas. De acordo com Fine (2006), a legitimidade de uma quantificação irrestrita não pressupõe a existência de um domínio absoluto do discurso. Nesse sentido, de algum modo especial, seria possível dar uma resposta negativa para (I) e, ainda assim, uma afirmativa para (II). Embora essa seja uma discussão de bastante relevo, minha apresentação do problema da quantificação irrestrita se concentra fundamentalmente nas abordagens conjuntísticas do problema, mesmo que nem sempre de um ponto de vista clássico. Nesse sentido, as abordagens que me interessam de maneira mais direta aqui apresentam respostas favoráveis à questão (I). Essa postura é assumida por mim aqui não como um dogma, pois proponho ao longo deste trabalho argumentos que, caso corretos, conduzem à inevitável admissão de um domínio absoluto do discurso.

Como tento pôr em evidência ao longo do texto, o tópico da quantificação irrestrita é central para o debate sobre a formalização de áreas relevantes da pesquisa filosófica e constitui o núcleo de uma polêmica ainda sem solução. Por um lado, alguns campos de pesquisa em filosofia – tendo a metafísica como o exemplo por excelência – claramente pretendem propor teorias construídas a partir de teses que são válidas para absolutamente tudo o que há, ou seja, teorias supostamente dotadas de um âmbito de discurso ligado ou expressando um domínio absoluto; o que podemos chamar ainda de uma totalidade irrestrita. Nesse caso, não haveria nenhum contexto restritivo associado às sentenças da teoria em questão e, consequentemente, uma teoria com tais características seria aplicável à totalidade do real. Por outro lado, inúmeros resultados obtidos fundamentalmente na lógica, teoria dos conjuntos e filosofia da linguagem da primeira metade do século xx apontam fortemente na direção oposta. Esses resultados sustentam tanto a impossibilidade técnica de expressar uma generalidade absoluta, quanto propõem o que podemos chamar de uma abordagem *contextualista* da quantificação restrita. Em outras palavras, esses resultados indicam não somente que toda quantificação formulada em nossas teorias possui uma restrição explícita ou implícita, mas também que o mecanismo de restrição desses quantificadores pode variar de acordo com o tipo de teoria quantificada. No âmbito de uma teoria formalizada, dados distintos campos de pesquisa – por exemplo, a aritmética e a teoria dos atos de fala – cada um desses campos possuiria seus próprios mecanismos de restrição de quantificadores. Esses mecanismos seriam escolhidos de acordo com sua adequação à função de expressar as características marcantes dos objetos de estudo do campo de pesquisa em questão, bem como as relações entre esses objetos. Desse modo, podemos falar de mecanismos de restrições semânticos, pragmáticos, sortais, e assim por diante. Em última instância, de acordo com essa abordagem da quantificação, toda sentença quantificada está contextualmente associada a algum mecanismo de restrição determinado pelos interesses da teoria onde a quantificação foi formulada.

Para uma melhor compreensão da terminologia usada ao longo desta tese, algumas observações preliminares sobre o uso da palavra “contexto” se mostram necessárias. Na discussão sobre quantificações irrestritas o termo “contexto” muitas vezes é usado em acepções completamente distintas. No que diz respeito ao seu uso técnico, há duas acepções mais recorrentes que são importantes de ter em mente ao longo do presente texto, a saber, (i) no sentido de *contexto de proferimento de uma quantificação*, que diz respeito aos aspectos pragmáticos que determinam o domínio do quantificador da sentença formalizada e (ii) o *contexto teórico onde a quantificação foi formulada*, ou seja, a que tipo de teoria a quantificação em questão pertence. Em geral, a acepção (i) é mais restrita e está presente em discussões sobre aspectos pragmáticos das linguagens naturais, tais como o debate acerca da teoria dos atos de fala e teoria da relevância, ao passo que a acepção (ii) é mais ampla e está associada à discussão sobre tipos de restrições de quantificações nos mais diversos contextos teóricos. Tendo em vista que o presente trabalho é dedicado à avaliação de argumentos favoráveis e contrários à quantificação irrestrita, a discussão sobre uma teoria geral de mecanismos de restrição de quantificadores não é desenvolvida aqui. No entanto, caso se faça necessário, ao longo do meu texto, havendo discussões sobre quantificações restritas tentarei tornar claro em cada situação que acepção da palavra “contexto” estará em jogo

Da forma como penso e dado o exposto acima, o debate acerca da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta ressalta a necessidade de uma posterior formulação de uma teoria geral de restrição de quantificadores. Essa teoria deve ter um caráter contextual na acepção (ii). Isso vale sobremaneira para o oponente de quantificações irrestritas. Como justificar essa afirmação? Aparentemente, quem nega a quantificação irrestrita parece caminhar em duas direções possíveis, a saber, provar que quantificações irrestritas são sem sentido ou paradoxais, ou provar que tais quantificações são, em verdade, quantificações restritas disfarçadas. No primeiro caso, deve-se provar que uma quantificação irrestrita não pode ser consistentemente formulada. No segundo caso, o oponente de tais quantificações deve ser capaz de explicitar, para cada quantificação, que tipo de mecanismo de restrição está sendo utilizado. Em grande parte, por comportar esse trabalho adicional, a semântica para quantificações restritas torna-se, pelo menos do ponto de vista estrutural, mais complexa que a semântica para quantificações irrestritas.[1] Não obstante, tendo em vista os limites do presente trabalho, não constitui meu objetivo aqui realizar uma tal teoria geral de mecanismos de restrição de quantificadores, mas deve-se ter claro que uma resposta ao problema da legitimidade de quantificação irrestrita – especialmente caso a resposta seja negativa – deve apontar na direção de uma discussão detalhada de tais mecanismos de restrição. Entre meus objetivos, dedicarei especial atenção à análise de argumentos favoráveis ao caráter paradoxal das quantificações irrestritas e de possíveis objeções a eles.

No que diz respeito à sua estrutura geral, a presente tese pode ser apresentada como segue. Embora seja o mais burocrático dos capítulos, o primeiro capítulo constitui uma importante revisão de alguns resultados técnicos sobre quantificadores e teoria dos conjuntos. Trata-se de uma tentativa de introduzir algumas noções e tópicos que são de extrema relevância na posterior defesa de minha posição sobre os problemas levantados. Este capítulo é dedicado de maneira especial às questões envolvendo as noções de quantificador, domínio de quantificação, modelos e conjuntos. Nele, apresento os traços gerais do que chamarei de *semântica padrão dos quantificadores*, de acordo com a qual cada quantificação está associada a um domínio entendido enquanto um conjunto. Além disso, analisando os fundamentos dessa mesma semântica conjuntística, apresento também alguns dos resultados técnicos que são costumeiramente usados pelos oponentes de quantificações irrestritas como o fundamento da impossibilidade de tais quantificações. Dentre estes resultados merecem destaque especial o Paradoxo de Russell e o Teorema de Cantor.

O segundo capítulo tem como ponto de partida a distinção entre quantificações restritas e irrestritas. Nele são desenvolvidos um conjunto de

[1] A esse respeito, McGee (2006: p. 183) afirma que uma semântica para quantificações restritas – sejam seus mecanismos de restrições implícitos ou explícitos – deve enfrentar problemas tais como o de delimitação das extensões dos predicados envolvidos nas restrições dos quantificadores. Esses problemas são tipicamente caracterizados como problemas de vagueza. Tais problemas surgem exatamente quando os limites de um domínio não são bem definidos. Na medida em que os limites de uma quantificação irrestrita são os mais inclusivos possíveis, problemas de vagueza são sem efeitos para tais quantificações.

argumentos de diversas ordens – linguísticos, lógicos, etc. – levantados contra a legitimidade de quantificações irrestritas e a existência de uma generalidade absoluta. Apresento também uma breve discussão da abordagem de Dummett acerca da quantificação e da extensibilidade indefinida de conceitos. Em última instância, Dummett possui uma forma diferenciada de entender os paradoxos da generalidade absoluta. Para Dummett, esses paradoxos são meramente aparentes, pois constituem, em verdade, provas da extensibilidade indefinida dos conceitos que eles tematizam.

No terceiro capítulo, tento apresentar alguns contra-argumentos aos oponentes da quantificação irrestrita e tento classificar algumas estratégias de ação quanto ao debate em questão. Ainda nesse capítulo desenvolvo uma discussão sobre alguns aspectos do que chamo de *metafísica da quantificação irrestrita* onde discuto alguns dos pressupostos filosóficos envolvidos no debate. É de meu especial interesse a tensão entre duas leituras da natureza dos conjuntos, a saber, a platonista e a construtivista, bem como suas implicações para a questão da generalidade absoluta e a semântica padrão dos quantificadores. Por fim, tento mostrar que há uma estreita relação entre a estrutura de argumentos por regresso ao infinito e a extensibilidade indefinida de determinados conceitos que inviabilizam a quantificação irrestrita dentro da semântica padrão. Se meu raciocínio estiver correto, o problema da quantificação irrestrita constitui um problema de síntese infinita ou progresso infinito; algo como um argumento por regresso ao infinito invertido.

Por fim, no quarto e último capítulo desenvolvo uma importante e mais detalhada discussão sobre a constituição lógico-semântica de conceitos que envolvam extensibilidade indefinida. Apresento também uma análise geral sobre o papel da contradição na lógica clássica e na constituição de alguns sistemas não clássicos. Nesse contexto, realizo especialmente uma discussão panorâmica sobre os traços característicos de teorias paraconsistentes e do chamado dialeteísmo. Além disso, tento trazer à luz as impressões de alguns filósofos de renome inquestionável tais como Aristóteles e Wittgenstein sobre o tópico da contradição e sua correlação com a consistência e a racionalidade de nossos sistemas formais. No entanto, o núcleo duro deste capítulo é marcado pela proposta de uma abordagem paraconsistente do paradoxo de Russell e do teorema de Cantor com vista a construir as condições formais para a admissão da quantificação irrestrita em sistemas não clássicos.

Como é bem sabido, o ponto de partida fundamental para uma abordagem frutífera de problemas teóricos e práticos, sejam eles filosóficos, científicos ou de qualquer outra forma de conhecimento, encontra-se em um domínio do estado da arte. No que diz respeito ao tópico da legitimidade da quantificação irrestrita, tal domínio revela o quanto o problema está imerso em polêmicas e disputas até então insuperáveis. Esse cenário é evidente através do fato básico de que é possível encontrar na literatura grandes nomes dotados de bons argumentos favoráveis e contrários a tais quantificações. Para ilustrar, do lado favorável temos: Richard Cartwright, Kit Fine, Geoffrey Hellman, Timothy Williamson, etc. Ao passo que contrários, a lista contém nomes de peso tais como: Bertrand Russell, Michael Dummett, Charles Parsons, Michael Glanzberg, dentre outros.

É também em virtude da vasta literatura sobre o tema e os limites de tempo e extensão física que são impostos no processo de redação de uma tese de doutorado que é inevitável a realização de recortes teóricos e metodológicos. No que diz respeito às referências utilizadas nesta tese, não é minha pretensão aqui desenvolver uma discussão que esgote os argumentos a favor e contra a legitimidade de quantificações irrestritas e da generalidade absoluta. No entanto, na medida do possível, busquei selecionar o que penso ser os principais argumentos de ambos os lados do debate para que o quadro teórico esboçado nesta tese contemplasse de maneira honesta o estado da arte. Mesmo com todo esse cuidado, certamente alguns trabalhos de destaque acabaram sendo negligenciados.

De maneira geral, considero o debate acerca da legitimidade da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta um campo profundamente fértil a partir de onde é possível não só derivar uma série de resultados relevantes para os fundamentos da própria pesquisa em filosofia, mas também permitir um novo olhar sobre velhas questões em filosofia da lógica e da matemática. Nesse primeiro aspecto, eu estou convencido do caráter metafilosófico do problema da quantificação irrestrita, tendo em vista que a possibilidade de um tratamento formal de determinadas áreas filosóficas – tal como a metafísica – depende profundamente desse tipo de quantificação. Além disso, cada vez mais os resultados obtidos a respeito do tópico desta tese apontam na direção do desenvolvimento de nossa compreensão sobre a concepção iterativa de conjuntos, a extensionalidade indefinida de determinados conceitos, o diagnóstico de inúmeros paradoxos, o tratamento não clássico de contradições, a natureza lógica do infinito matemático, a aritmética dos ordinais e os fundamentos de teorias alternativas dos conjuntos, dentre muitos outros tópicos.

***

Com o intuito de finalizar essa introdução, embora não faça parte do protocolo, talvez umas poucas palavras sobre minha trajetória acadêmica possam esclarecer algumas escolhas feitas ao longo da presente tese. Minha jornada através dos quantificadores teve início em 2007 com um projeto de pesquisa para o mestrado em filosofia na Universidade Federal do Ceará. Na época, meu objeto de estudo era fundamentalmente o quantificador existencial através do tópico da forma lógica de sentenças de existência. Dentre tantas coisas, chamou-me atenção a íntima conexão entre quantificações e ontologia. Nesse contexto, é destacável a tese quineana que atribui comprometimento ontológico ao valor das variáveis quantificadas. Embora, caso vivo, Quine teria certamente resistência em aceitar determinados sistemas formais como ontologicamente bem fundados, com o passar do tempo, pareceu-me cada vez mais razoável estender de algum modo a tese quineana ao contexto de variação sobre sistemas formais. Por exemplo, a passagem de uma lógica clássica para uma não-clássica pode figurar não só como uma mudança radical de padrões sintáticos de derivação, mas, fundamentalmente, como uma mudança de ontologia. A adesão a um sistema formal não-clássico quase sempre vem acompanhado de uma nova visão de mundo.

Essa questão me parece novamente central na discussão sobre a quantificação irrestrita e a credibilidade da generalidade absoluta. Ao mostrar que a semântica padrão para a lógica clássica não aborda satisfatoriamente um discurso absolutamente geral, estamos verificando um limite para a ontologia expressa por essa lógica. Podemos até assumir a existência de uma generalidade absoluta enquanto uma posição filosófica ou mesmo uma intuição pré-filosófica acerca da constituição da realidade, mas é inconcebível um tratamento formal de tal generalidade nos quadros dos sistemas clássicos e da nossa teoria usual dos conjuntos axiomatizada por Zermelo-Fraenkel. A defesa de uma abordagem não clássica para a quantificação irrestrita, dependendo do caso, é também uma decisão em ontologia ou epistemologia. Ela representa a opção por uma concepção de realidade – ou a descrição epistêmica de uma realidade – que seja completa, maximal; não uma totalidade aberta e em construção.

Certamente, nem todos os objetivos deste projeto podem ser efetivamente realizados nos limites impostos aqui, mas certamente eles apontam para um programa de estudo mais amplo que toca diretamente vários tópicos em lógica formal, metafísica e teoria do conhecimento. A amplitude deste tópico é uma marca de sua importância. A existência de múltiplas implicações filosóficas e formais do debate sobre quantificações irrestritas conta fortemente como um argumento em favor da sua relevância.

1
O QUE É UM QUANTIFICADOR?
Sobre domínios de quantificação e conjuntos

O núcleo argumentativo deste trabalho está comprometido fundamentalmente com uma abordagem formal da quantificação na medida em que meu objetivo é avaliar a legitimidade de teorias formalizadas que pressuponham uma generalidade absoluta. Por isso, devo concentrar-me exclusivamente na avaliação do comportamento lógico-semântico do quantificador universal ($\forall$) da lógica de predicados de primeira ordem em sentenças supostamente quantificadas de maneira irrestrita.[2] Obviamente, o fenômeno da quantificação está amplamente disseminado nas linguagens naturais e, portanto, é anterior ao surgimento das linguagens formais. No entanto, não constitui objeto de estudo deste trabalho uma discussão sobre os diversos modos de quantificar em linguagens não formalizadas. No que diz respeito ao estudo da quantificação em linguagens naturais, Barwise e Cooper (1981: p.168) e Neale (1990: p.42) são exemplos de trabalhos relevantes. Em linguagem natural, a compreensão geral é que expressões como "algum", "todo", "a maioria dos", "poucos", dentre muitas outras costumeiramente usadas no cotidiano, quando seguidas de um termo conceitual – por exemplo, "filósofo", "mesa", etc. – operam como um quantificador. Tais expressões figuram de maneira similar aos termos lógicos de sistemas formais na medida em que satisfazem alguns critérios técnicos tais como invariância sob permutação. Dado os meus interesses nas consequências filosóficas envolvidas no debate acerca de restrição ou irrestrição de quantificadores em teorias formalizadas, o presente trabalho ficará restrito ao contexto de análise das linguagens formais; embora alguns dos resultados discutidos aqui possam ser, com o devido cuidado, adaptados ao contexto de aplicação dos outros tipos de quantificadores.

Antes de explorar diretamente a questão da credibilidade lógica da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta é necessário apresentar os

[2] Vale ressaltar aqui que o problema da restrição – e irrestrição – de quantificadores em linguagens formais surge não só no contexto da discussão do comportamento sintático e semântico do quantificador universal ($\forall$), mas também do quantificador existencial ($\exists$). Por razões de simplificação, tendo em vista que esses quantificadores são interdefiníveis, irei me deter exclusivamente sobre o quantificador universal, uma vez que esse quantificador expressa de maneira mais direta e intuitiva a nossa compreensão do que vem a ser uma totalidade.

traços gerais do que entendemos por um quantificador lógico em sua acepção formal e diferenciá-lo de outras formas de quantificação presentes em linguagens naturais. Da forma como penso, o melhor caminho para realizar esse objetivo é apresentar os traços gerais da sintaxe e da semântica embutida nas sentenças quantificadas da lógica de primeira ordem assumindo essa linguagem aqui como um exemplo paradigmático de sistema formal.

1.1. A semântica padrão dos quantificadores

No sentido técnico-formal do termo, entendemos por "quantificador" um operador lógico que, quando associado a uma fórmula aberta φ*x* – sendo φ uma condição semanticamente bem definida –, produz uma sentença com valor de verdade determinado. Na lógica clássica de predicados, os quantificadores são basicamente de dois tipos: o quantificador universal (∀) e o quantificador existencial (∃). Ambos possuem a capacidade de expressar o grau de satisfação de uma fórmula por parte de itens de um domínio pré-estabelecido. Em termos da semântica padrão dos quantificadores, essa capacidade opera da seguinte maneira:

- ∃*x*φ*x* afirma que *há pelo menos um* indivíduo *x* do domínio tal que *x* satisfaz φ.
- ∀*x*φ*x* afirma que *para todo* indivíduo *x* do domínio, *x* satisfaz φ.

Para uma melhor compreensão do que está sendo dito acima, é importante ter clareza sobre o que vem a ser o domínio de quantificação das sentenças de uma linguagem formal L. Em linhas gerais, um *domínio* é um agregado D=(a_1, a_2, ..., a_n) – que, embora seja apresentado aqui de maneira finita, pode também ser infinito – o qual costumamos chamar também de *universo do discurso* de L. Cada membro a_n de D é dito um objeto do domínio. É com base no domínio que podemos definir ou interpretar as propriedades, relações e os demais itens não-lógicos assumidos por L. Além disso, por um *modelo* para uma linguagem L entendemos uma estrutura ou um par M=<D, I>, onde D é o domínio e I é uma função interpretativa que associa cada constante individual de L a um, e somente um, objeto de D. Desse modo, as operações semânticas fundamentais de L podem ser definidas com base na noção de domínio enquanto conjunto. Por exemplo, cada predicado monádico φ sintaticamente bem formado de L deve selecionar um subconjunto de D composto exclusivamente por todos os membros de D que, de acordo com a interpretação I assumida no modelo M ao qual o domínio em questão pertence, satisfazem φ. Como veremos a seguir, essa afirmação possui estreita relação com a teoria ingênua dos conjuntos, em especial, com o chamado princípio da compreensão. Veremos também que o uso irrestrito de tal princípio conduz a teoria dos conjuntos a paradoxos.

De modo análogo ao que ocorre com os predicados monádicos, cada predicado binário de L estabelece uma relação *R* definida em L que seleciona um conjunto de pares ordenados <x, y> de membros de D que, de acordo com a interpretação I assumida no modelo M ao qual o domínio em questão pertence, satisfazem *R*xy; e assim por diante para cada predicado *n*-ário de L. O comportamento de predicados unários e as demais relações descritas por L podem ser sintetizadas da seguinte forma: cada predicado de aridade *n* – para $n \geq 1$ – de L, determina um conjunto C de *n*-úplas ordenadas, onde todos os elementos que compõem as *n*-úplas ordenadas de C pertencem ao domínio associado a L. Em princípio, a função interpretativa I garante que todo predicado sintaticamente bem definido deve estar associado a uma extensão definida a partir de D.

A teoria dos modelos desenvolvida ao longo do século xx, especialmente por lógicos como Alfred Tarski, em consonância com a teoria dos conjuntos consagrou a visão de que um domínio D de uma linguagem L deve ser entendido precisamente enquanto um conjunto de todos os objetos assumidos por L. Com isso, se nós operamos formalmente com os quantificadores de maneira satisfatória, nós devemos associar toda sentença quantificada a um domínio D pressuposto pela linguagem à qual a sentença pertence e esse domínio deve ser entendido invariavelmente como um conjunto.

É também importante ressaltar que a semântica padrão dos quantificadores permite-nos definir de maneira elegante alguns conceitos relevantes em filosofia da linguagem e metafísica tais como a já mencionada noção de *universo do discurso* e o de *comprometimento ontológico*. A noção de domínio opera, em linhas gerais, como uma contraparte técnica – modelo teorética – da noção linguística de universo do discurso. Uma teoria formalizada T tem como universo do discurso exatamente o conjunto de entidades ou o sistema de referência estabelecido pelo domínio das sentenças quantificadas de T. É também esse mesmo domínio o instrumento técnico que fundamenta a atribuição de valor semântico para os termos não lógicos de T.

Foi exatamente nesse contexto teórico que Quine formulou seu famoso critério de comprometimento ontológico expresso no *slogan* “ser é ser o valor de uma variável”. Para Quine, a semântica embutida em nossas quantificações existenciais constitui o ponto por excelência de diagnóstico de comprometimento ontológico. Nesse sentido, Quine via a ontologia, enquanto teoria global sobre o que existe, como devendo ser regimentada pela linguagem quantificacional com a adição da noção de identidade. Os comprometimentos ontológicos de uma teoria T são determinados pelas entidades pressupostas por T para que suas sentenças existencialmente quantificadas sejam verdadeiras. O que Quine propôs por intermédio do slogan acima não foi precisamente um critério para determinar aquilo que há, mas, antes, um critério para estabelecer o que as diversas teorias afirmam que há. Essa tese pode ser verificada nas seguintes passagens:

> To show that some given object is required in a theory, what we have to show is no more nor less than that object is required, for the truth of the theory, to be among values over which the bound variables range. (Quine, 1969: p. 94)
>
> (…) we now have a more explicit standard whereby to decide what ontology a given theory or form of discourse is committed to: a theory is committed to those and only those entities to which the bound variables of the theory must be capable of referring in order that the affirmations made in theory be true. (Quine, 1953: p. 13-14)

Nesse sentido, o papel filosófico do critério de comprometimento ontológico proposto por Quine pode ser corretamente entendido como um critério de nível meta-ontológico. De fato, é exatamente assim que van Inwagen (2001: cap. 1) defende que o *slogan* quineano deve ser lido.

Para uma melhor compreensão do que foi dito até agora a respeito de quantificações e domínios, vale ressaltar que a literatura sobre o tema sugere uma dupla interpretação dos quantificadores “$\forall$” e “$\exists$”, a saber, uma *objetual* e outra *substitucional*. De maneira geral, dizemos que temos uma interpretação objetual dos quantificadores, caso seu fundamento esteja nos valores das variáveis que ocorrem nas sentenças quantificadas, ou seja, nos objetos do domínio que as variáveis percorrem. Nesse sentido, uma interpretação objetual dos quantificadores estabelece as seguintes condições de verdade:

"$\forall x\varphi x$" é verdadeira se, e somente se, para todos os objetos *x* no domínio D, *x* satisfaz φ;

ao passo que,

"$\exists x\varphi x$" é verdadeira se, e somente se, para pelo menos um objeto *x* no domínio D, *x* satisfaz φ.

Por outro lado, uma interpretação é dita substitucional caso ela apele, não para valores de variáveis em domínios como ocorre na leitura objetual, mas para classes de substituições de variáveis, ou ainda, expressões que, quando usadas para substituir as variáveis, podem oferecer ou produzir uma instância verdadeira da sentença quantificada. No contexto da interpretação substitucional dos quantificadores, podemos definir uma instância substitutiva como uma sentença resultante da operação de aplicação das regras de eliminação de quantificadores que aprendemos nos livros-texto de lógica de predicados. Por exemplo, a sentença quantificada "$\forall x\mathrm{F}x$" possui como uma instância substitutiva a sentença "F*a*". Com isso, seguindo o modelo da interpretação substitucional temos as seguintes condições de verdade para os quantificadores universal e existencial:

"$\forall x\varphi x$" é verdadeira se, e somente se, todas suas instâncias substitutivas são verdadeiras;

ao passo que,

"$\exists x\varphi x$" é verdadeira se, e somente se, pelo menos uma de suas instâncias substitutivas é verdadeira.

As duas interpretações possuem diferentes consequências filosóficas. Do ponto de vista metafísico estabelecido pela discussão acima sobre comprometimento ontológico, a interpretação objetual proporciona um critério direto de checagem de comprometimento de teorias, ao passo que, na interpretação substitucional, esse critério só pode ser estabelecido indiretamente. Não por acaso, o tratamento que Quine oferece aos quantificadores em seu *Methods of Logic* é precisamente do tipo objetual.[3] Isso ocorre fundamentalmente porque a interpretação objetual, ao apelar para a noção de domínio da quantificação, faz referência direta às entidades que satisfazem a sentença quantificada. No entanto, o comprometimento ontológico na interpretação

[3] Para mais detalhes, Cf. Quine, W. v. O. (1950) *Methods of Logic*. Holt, Rinehart and Winston: New York. Partes II e III.

substitucional só pode ser determinado por intermédio de uma checagem do comprometimento ontológico de cada uma de suas instâncias substitutivas.

Do mesmo modo que ocorre com a formulação do critério de comprometimento ontológico de Quine, em princípio, a investigação desenvolvida nesta tese a respeito da legitimidade de quantificações irrestritas e da generalidade absoluta pressupõe uma leitura objetual da quantificação universal, uma vez que ela é, em primeiro lugar, uma investigação sobre a existência de um domínio absoluto que as variáveis de uma sentença irrestritamente quantificada devem percorrer.

Continuando a apresentação da semântica padrão dos quantificadores, é importante ressaltar ainda algumas interessantes propriedades da quantificação. Na lógica de predicados, os quantificadores – universal e existencial – podem ser interdefinidos, uma vez que eles satisfazem algumas relações de equivalência. Dado um domínio finito D=(a_1, a_2, ... , a_n) podemos estabelecer a seguinte classe de equivalências para quantificações existenciais e universais:

- $\exists x \varphi x \leftrightarrow \varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee ... \vee \varphi(a_n)$
- $\forall x \varphi x \leftrightarrow \varphi a_1 \wedge \varphi(a_2) \wedge ... \wedge \varphi(a_n)$
- $\forall x \varphi x \leftrightarrow \neg\exists x \neg\varphi x$
- $\exists x \varphi x \leftrightarrow \neg\forall x \neg\varphi x$

A sintaxe da lógica de predicados estabelece também um conjunto de regras de inferências que operam sobre quantificações que são importantes para a compreensão do modo como lidamos com esses operadores. Uma apresentação geral dessas regras pode ser dada através da lista abaixo:

(i) Eliminação do quantificador universal

$\underline{\forall x \varphi x}$
$\varphi \mu$

[onde μ é um parâmetro para constantes individuais que indica que a instanciação da sentença quantificada universalmente resulta em uma sentença verdadeira para toda constante individual que nomeia objetos no domínio.]

(ii) Introdução do quantificador universal

$\underline{\varphi a}$
$\forall x \varphi x$

[*restrição*: a inferência só é legítima desde que *a* não ocorra em uma premissa ou hipótese do argumento, mas tenha sido introduzido como um parâmetro individual em algum momento da prova a partir de uma anterior aplicação da regra de eliminação de quantificador universal.]

(iii) Eliminação do quantificador existencial

$\underline{\exists x \varphi x}$

φa

[onde *a* é um parâmetro individual introduzido para representar o indivíduo do domínio – seja ele quem for – que satisfaz o predicado φ.]

(iv) Introdução do quantificador existencial

$\underline{\varphi a}$

$\exists x \varphi x$

[onde *a* é uma constante individual que nomeia um dado objeto do domínio.]

Alguns lógicos acrescentam como um teorema o seguinte condicional:

(v) $\forall x \varphi x \rightarrow \exists x \varphi x$

que pode ser obtida em sistemas axiomáticos a partir de uma combinação de instanciação universal e generalização existencial. No entanto, isso é algo controverso, uma vez que é questionável a legitimidade de inferir existência da pura lógica. Questionamentos como esses levaram ao desenvolvimento de lógicas não clássicas tais como a lógica intuicionista e a lógica livre.

A despeito de todas essas discussões mais detalhadas sobre a credibilidade de cada uma dessas regras, há uma destacável importância para a apresentação preliminar de regras de inferências no contexto mais geral de desenvolvimento da semântica padrão dos quantificadores. Essa importância se dá na medida em que uma postura respeitável, embora não unânime, em lógica e filosofia da lógica sustenta que o sentido de constantes lógicas em geral – e isso inclui obviamente os quantificadores – é dado pelas regras de introdução e eliminação de tais constantes dentro de um sistema formal específico ou por meio de funções de verdade expresso nas tabelas de verdade para conectivos. Essa é uma posição explicitamente defendida, por exemplo, por Gentzen. Ao apresentar seu sistema de dedução natural e cálculo dos sequentes, Gentzen (1969: p. 80) defendeu que as regras de introdução de termos lógicos – tais como quantificadores – constituem definições de tais termos, ao passo que as regras de eliminação operam como consequências de tais definições. De acordo com McFarlane (2009), isso aponta para a ideia de que compreender o sentido de termos lógicos consiste basicamente no domínio das regras dos termos em questão. Quanto a importância das funções de verdade no estabelecimento do sentido dos conectivos, essa posição encontra-se fundamentada no comportamento vero-funcional dos conectivos da lógica proposicional expresso através de tabelas de verdade. Nesse contexto, as tabelas de verdade definem ou dão o sentido dos conectivos na medida em que elas apresentam as condições de satisfação de sentenças com a ocorrência de tais conectivos.

1.1.1. Quantificações e a Teoria dos Conjuntos

Há um imperativo na semântica para a lógica clássica desenvolvida no século xx: não é possível dominar tal semântica sem um domínio prévio de algumas noções básicas da teoria dos conjuntos. Boa parte deste capítulo pretende tornar isso claro mostrando em que medida a semântica padrão dos quantificadores depende da teoria dos conjuntos. Para compreender as reais dimensões filosóficas implícitas na quantificação lógica é de extrema importância entrar no âmago da teoria dos conjuntos e de alguns de seus resultados técnicos. Como vimos acima, a teoria dos modelos desenvolvida ao longo do século xx e que estabeleceu o que estou chamando aqui de *semântica padrão dos quantificadores* assumiu domínios como sendo nada mais que conjuntos. Desse modo, a teoria dos conjuntos cumprirá, sem sombra de dúvida, um papel de destaque ao longo deste trabalho. Dado o atual desenvolvimento das ciências formais, é impossível uma real compreensão da teoria dos modelos e dos fundamentos da matemática pura sem o olhar técnico da teoria dos conjuntos. Nesse sentido, a criação da teoria dos conjuntos por Cantor foi certamente um acontecimento de grande importância e até mesmo revolucionário na história das ciências formais. Essa afirmação é constantemente retomada e não é de modo algum exagerada, dado o fato de que, em princípio, todas as noções básicas da matemática pura podem ser definidas em termos de noções conjuntísticas. Do mesmo modo, muitos dos teoremas matemáticos fundamentais podem ser provados com base nos postulados da teoria dos conjuntos juntamente com os axiomas do campo matemático em questão. Nesse sentido, a teoria dos conjuntos figura como a base da matemática pura.

Fora da matemática, a teoria dos conjuntos possui, dentre suas inúmeras aplicações, a função que me interessará aqui de maneira mais direta, a saber, a de oferecer os recursos técnicos para a construção de semânticas para sistemas formais. É precisamente com base nesse segundo aspecto que podemos afirmar categoricamente ser impossível a compreensão plena da teoria dos modelos sem uma anterior compreensão dos recursos disponíveis na teoria dos conjuntos.

Não obstante, é importante destacar que a teoria dos modelos é permeada pela noção de conjunto enquanto um objeto; o que a torna, consequentemente, uma noção não lógica. Essa compreensão dos conjuntos impõe alguns problemas quando confrontada com o caráter *topic-neutral* costumeiramente atribuído à lógica. O aspecto formal da lógica carrega consigo a pretensão de neutralidade quanto ao conteúdo e, portanto, não poderia estar estruturalmente comprometida com objetos abstratos – a exemplo de conjuntos –, mas também porque a constituição dos conjuntos não parece algo que possa ser explanada de maneira meramente formal. Tal explanação envolve aspectos fortemente metafísicos. Por isso, é digno de nota que, se alguém defende a indispensabilidade da semântica conjuntística para a constituição de uma teoria dos modelos bem sucedida e aceita também essa interpretação realista dos conjuntos, esse mesmo alguém está a defender que não é possível pensar a lógica completamente dissociada de comprometimentos metafísicos. Mais palavras serão ditas nos próximos capítulos acerca do aspecto metafísico não só da nossa teoria usual dos conjuntos, mas também do modo como interpretamos nossas sentenças quantificadas em linguagens formais.

A noção de conjunto é algo tão elementar e auto evidente, que, embora haja uma série de elucidações acerca desta noção presentes nos inúmeros textos acadêmicos sobre o tema, dificilmente alguém se arriscaria a propor uma definição precisa de *conjunto* em termos de conceitos mais fundamentais. A forma mais costumeira de apresentar essa noção é associando-a informalmente a outras noções tais como as de *agregado* ou *coleção*. Por exemplo, o conjunto de deputados federais brasileiros pode ser entendido como o agregado ou a coleção de indivíduos brasileiros que satisfazem a condição de *ser um deputado federal*.

A teoria dos conjuntos que predomina entre lógicos e matemáticos atualmente é certamente a abordagem axiomática desenvolvida por Zermelo-Fraenkel com a adição do célebre axioma da escolha (*choice axiom*). Por isso, é comum a referência a esse sistema – que seguirei de agora em diante no presente texto – como teoria dos conjuntos ZFC. No entanto, ZFC já é um produto melhor elaborado a partir do desenvolvimento e superação que a crise dos paradoxos impôs à teoria ingênua dos conjuntos. Em grande parte, a abordagem axiomática presente em ZFC surge como um empreendimento sistemático de pôr a teoria dos conjuntos desenvolvida inicialmente por Georg Cantor[4] sobre fundamentos sólidos que superassem os problemas instaurados pelos paradoxos envolvendo alguns dos princípios conjuntísticos tais como eles foram originalmente concebidos. A forma originária da teoria dos conjuntos desenvolvida por Cantor e estabelecida anteriormente à crise dos paradoxos é comumente chamada de *teoria ingênua dos conjuntos* e sempre que, ao longo deste trabalho, eu mencionar a teoria ingênua, é a essa versão originária da teoria dos conjuntos que estarei me referindo. Boa parte do presente capítulo é uma tentativa de mostrar como alguns resultados desconcertantes derivados dentro da teoria dos conjuntos permitiram passar de uma concepção ingênua para uma abordagem axiomática e consistente tal como ZFC. Dentre estes resultados desconcertantes obtidos a partir dos princípios básicos da teoria ingênua, certamente um dos mais celebrados foi o paradoxo de Russell, a respeito do qual tratarei adiante.

O primeiro e mais compreensível axioma de ZFC é o chamado axioma da extensionalidade, que estabelece um critério preciso de identidade de conjuntos de acordo com o qual dois conjuntos são idênticos caso eles tenham os mesmos elementos.

$\alpha=\beta \leftrightarrow \forall x(x\in\alpha\leftrightarrow x\in\beta)$ **Axioma da extensionalidade**

Desse modo, podemos afirmar que os conjuntos são completamente determinados por seus elementos ou membros. Por isso, em teoria dos conjuntos, tomamos a relação de pertinência ($\in$) como uma relação básica. Ela é também

[4] Para uma visão panorâmica de como Cantor edificou a teoria dos conjuntos pondo-a sobre bases demonstrativas e não meramente intuitivas cf. (Belna, 2011).

considerada básica, pois a partir dela podemos definir uma série de operações sobre conjuntos, tais como a união ($\cup$) e interseção ($\cap$) de conjuntos:

$\alpha\cup\beta = \{x \mid x\in\alpha \vee x\in\beta\}$

$\alpha\cap\beta = \{x \mid x\in\alpha \wedge x\in\beta\}$

A partir daí, podemos introduzir uma série de importantes definições das quais a lista a abaixo constitui um pequeno exemplo:

1. Dois conjuntos S e S* possuem a mesma cardinalidade [o mesmo número de elementos] caso seus elementos possam ser postos numa bijeção [numa correspondência um-a-um]. É importante perceber que a partir desse procedimento podemos determinar que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos – ou seja, saber que eles são equinuméricos – ainda que não saibamos precisar qual é o número em questão.
2. Um conjunto S será um subconjunto de S* caso todos os elementos de S sejam também elementos de S*. Dizemos ainda que S é um subconjunto próprio de S* caso todo elemento de S seja também elemento de S*, mas não o contrário.
3. Se S e S* forem conjuntos de diferentes cardinalidades, então a cardinalidade de S será menor que a cardinalidade de S* se S tiver a mesma cardinalidade de um subconjunto próprio de S*.
4. Um conjunto S é dito infinito caso haja uma bijeção entre os elementos de S e os elementos de algum dos subconjuntos próprios de S.

Um ponto importante para a compreensão do que se seguirá ao longo dos próximos capítulos é que em ZFC não há limites para a geração de conjuntos. Os conjuntos são pensados como indefinidamente extensíveis com base em operações tais como a de conjunto potência – que tratarei em mais detalhes na seção seguinte – e uniões de conjuntos. Essa extensibilidade indefinida da abordagem axiomática dos conjuntos em ZFC ficou conhecida como a *concepção iterativa de conjunto*: dado qualquer conjunto e uma operação apropriada, podemos gerar um conjunto maior – com mais elementos – do que o conjunto ao qual a operação foi inicialmente aplicada.

A concepção iterativa de conjuntos é expressa a partir de uma hierarquia cumulativa onde cada nível contém conjuntos construídos apenas com itens dos níveis inferiores. Potter (2004: p. 41) chama a coleção C composta por todos os itens de níveis inferiores a um dado nível *c* de uma *história* de C. Essa história leva de entidades elementares – sejam elas particulares concretos, *urelements* ou, no caso de uma teoria pura dos conjuntos, o conjunto vazio – ao próprio conjunto C. Desse modo, podemos definir a história de C ou o processo de construção de C por acumulação (Acc) do seguinte modo:

$\text{Acc}(C) = \{x \mid x \text{ é um individual} \vee (\exists B \in C \mid x \in B \vee x \subseteq B)\}$

De certo modo, foram os resultados técnicos estabelecidos especialmente por Russell e Cantor que nos permitiram perceber claramente os problemas da extensibilidade a extensibilidade indefinida de conjuntos, proporcionando assim uma revolução para a teoria dos conjuntos que está na base não só da passagem da concepção ingênua para a abordagem axiomática do nosso discurso sobre coleções, mas também no desenvolvimento de mecanismos inteiramente novos e profundamente férteis para a teoria dos números. Como um exemplo desse último aspecto, a concepção cantoriana de número transfinito representa um exemplo paradigmático. Como Shapiro e Wright (2006: p. 256) destacam, ao definir os números transfinitos, Cantor fez apelo, dentre outros, a dois princípios básicos: o primeiro nos diz que todo número α possui um sucessor $\alpha+1$; já o segundo afirma que cada conjunto S de números que não possui um maior número, possui, no entanto, um limite que pode ser expresso como o menor número maior que todo membro de S. Desse raciocínio podemos derivar imediatamente a base de definição dos números transfinitos e a ideia de que tais números não podem ser postos em uma totalidade fechada como um conjunto. Desse modo, o próprio Cantor ressalta que os números são produtos de um processo de criação completamente infinito.

Essa passagem da teoria ingênua para uma teoria axiomática consolidou também uma ortodoxia no modo de pensar a teoria dos conjuntos que predomina até hoje. Embora possamos encontrar hoje inúmeras teorias alternativas dos conjuntos, sem dúvida alguma ZFC possui uma relevância teórica difícil de rivalizar. A ortodoxia e a relevância teórica da concepção iterativa presentes na abordagem axiomática de ZFC consolidou um sentimento de confiança entre lógicos e matemáticos que é captado em sua essência pela seguinte passagem de George Boolos:

> [The iterative conception of set] is, perhaps, no more natural a conception than the naïve conception, and certainly not quite so simple to describe. On the other hand, it is, as far as we know, consistent: not only are the sets whose existence would lead to contradiction not assumed to exist in the axioms of the theories that express the iterative conception, but the more than fifty years of experience that practicing set theorists have had with this conception have yielded a good understanding of what can and what cannot be proved in these theories, and at present there just is no suspicion at all that they are inconsistent. (Boolos, 1998a: p. 16)

Até o final deste trabalho, eu pretendo questionar a ortodoxia e a primazia do uso de ZFC no tratamento do problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta. No entanto, antes disso, é preciso entender claramente as motivações fundamentais da rejeição à concepção ingênua de conjuntos em favor da abordagem axiomática; o que pretendo fazer ao longo da próxima seção. Foi, em grande parte, em torno dessas motivações que foram construídos muitos dos argumentos contra a possibilidade do tratamento formal de quantificações irrestritas e da existência de uma generalidade absoluta que serão tratados em detalhes no segundo capítulo.

1.2. Russell e Cantor: da teoria ingênua à abordagem axiomática

Da forma como costumeiramente pensamos, os conjuntos estão geralmente associados a condições específicas usadas para determinar seus membros. Nesse sentido, pertencem a um dado conjunto apenas os objetos que satisfazem a condição associada ao conjunto em questão. Como Boolos (1998a: p. 13) chama atenção, o próprio Cantor definiu informalmente o termo “conjunto” como uma totalidade de elementos definidos que são combinados por meio de uma lei. Por exemplo, o conjunto dos afluentes do Amazonas possui como membros apenas os rios que satisfazem a condição *ser um afluente do Amazonas*. Por trás desse raciocínio simples se encontra o chamado princípio da compreensão formulado na teoria ingênua dos conjuntos e que é rejeitado pela abordagem axiomática de ZFC por razões que veremos a seguir.

De acordo com o princípio da compreensão, para toda propriedade φ, há um conjunto y que possui como membros apenas os objetos que satisfazem φ. Em outras palavras, esse princípio associa a cada propriedade um conjunto que corresponde à extensão da propriedade em questão. Em termos formais ele pode ser enunciado da seguinte maneira:

$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$ **Princípio da Compreensão**

onde φ é uma propriedade qualquer que terá num predicado pertencente à linguagem objeto sua contraparte linguística. Essa mesma propriedade possuirá uma extensão estabelecida a partir do domínio do discurso da linguagem em questão. Essa extensão é precisamente caracterizada na fórmula pelo conjunto *y*, ou seja, o conjunto de itens que satisfazem φ. Desse modo, podemos falar do princípio da compreensão como estabelecendo uma operação de abstração com base em uma função que a cada propriedade (predicado) mapeia uma extensão. Essa operação pode ser formalmente expressa através do seguinte esquema:

$\varphi(x) \mapsto \{x \mid \varphi(x)\}$

De certo modo, o princípio da compreensão pode ser também entendido à luz de um princípio lógico clássico ainda mais fundamental, a saber, o *terceiro excluído*. Se para qualquer objeto *x* e qualquer propriedade P tomados arbitrariamente, vale que $\mathrm{P}x \vee \neg \mathrm{P}x$, então toda propriedade P divide a totalidade do que existe em dois conjuntos básicos: o conjunto dos objetos que satisfazem P e o conjunto dos objetos que não satisfazem P. Portanto, toda propriedade P possui uma extensão entendida enquanto o conjunto dos objetos que satisfazem P. É basicamente essa intuição que fundamenta o princípio da compreensão na concepção ingênua de conjunto.

Obviamente, tomado como um princípio básico associado à nossa intuição do que seja um conjunto ou uma coleção de objetos, o princípio da compreensão levanta uma pretensão de universalidade. Se ele é um princípio legítimo como à primeira vista ele parece ser, então *toda* condição ou propriedade deve comportar-se do modo por ele descrito. Nesse contexto, seria um problema desconcertante – porque contra-intuitivo – apresentar alguma condição sintaticamente bem definida dentro de nossa linguagem, mas que não determine um conjunto, ou seja, uma propriedade para a qual não haja uma extensão correspondente. Foi basicamente esse o resultado obtido por Russell e que forçou uma profunda revisão da nossa compreensão pré-teórica de conjunto.

1.2.1. O Paradoxo de Russell

Embora o princípio da compreensão – juntamente com o axioma da extensionalidade e o axioma da escolha – esteja na base da obtenção de resultados importantes na teoria dos conjuntos, sua fama foi ampliada, em grande parte, em virtude do papel que ele cumpre na descoberta do Paradoxo de Russell. Da mesma forma que há conjuntos compostos por objetos físicos ou abstratos – podemos falar tanto do conjunto de livros na biblioteca municipal quanto do conjunto de números primos entre 0 e 100 –, há também conjuntos de conjuntos. Um exemplo é o conjunto de todos os conjuntos que possuem mais de três membros. O que Russell percebeu ao jogar com as condições ou propriedades que determinam os membros de conjuntos de conjuntos é que elas podem, algumas vezes, gerar contradições quando associadas aos princípios fundamentais da teoria dos conjuntos. No que diz respeito a conjuntos de conjuntos, parece intuitivo pensar que alguns conjuntos satisfazem a propriedade que lhe é associada, enquanto outros não. Por um lado, o conjunto de todos os conjuntos com mais de três membros possui, ele próprio, mais de três membros e, portanto, pertence a si mesmo. Por outro lado, o conjunto dos filósofos não é ele próprio um filósofo, portanto, não pertence a si mesmo. Nesse contexto, parece em princípio completamente inteligível e legítimo pensar na condição ou propriedade *conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos* como determinando uma condição ou propriedade que, de acordo com o princípio da compreensão, produz um conjunto R – de Russell – cujos membros são apenas os conjuntos que não satisfazem as condições associadas a eles próprios, ou seja, apenas os conjuntos que não pertencem a si mesmos. No contexto do princípio da compreensão formalizado, essa condição produz a seguinte situação:

$$\forall x(x \in \mathrm{R} \leftrightarrow \neg(x \in x))$$

onde x é uma variável para conjuntos. O *insight* de Russell foi questionar se o próprio conjunto R satisfaz ou não a condição $\neg(x \in x)$; o que equivale a perguntar sobre R se ele pertence a si mesmo. Nesse caso, obtemos uma instância contraditória da fórmula acima

$$\mathrm{R} \in \mathrm{R} \leftrightarrow \neg(\mathrm{R} \in \mathrm{R})$$

Eis o paradoxo de Russell![5]

O que parece claro é que o resultado descoberto por Russell constitui uma *reductio ad absurdum* do princípio ingênuo da compreensão e, consequentemente, uma prova da inconsistência da teoria ingênua dos conjuntos suportada pelo princípio em questão. Vale ressaltar que o paradoxo de Russell não consiste em uma refutação de toda e qualquer teoria de conjuntos, mas, antes, impõe alguns desafios e limites que devem ser levados em consideração no desenvolvimento de qualquer teoria de agregados que se pretenda consistente. Uma estratégia para barrar o paradoxo de Russell bastante divulgada em livros textos de teoria dos conjuntos foi introduzida na versão axiomática de ZFC através do chamado *axioma da separação*, que é nada mais que uma forma revisada e restritiva do princípio ingênuo da compreensão.[6] O axioma possui esse nome porque ele permite separar de um pré-estabelecido conjunto aqueles elementos que satisfazem uma dada condição e formam conjuntamente uma totalidade constituída por todos os elementos que satisfazem a condição em questão. Temos, portanto:

$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x)))$ **Axioma da separação**

onde tudo se comporta de maneira similar ao princípio da compreensão apresentado acima, com exceção de *z* que é introduzido como um conjunto pré-estabelecido a partir de onde serão separados os elementos que satisfazem a condição em questão. Podemos usar aqui o exemplo de Suppes (1972: p. 6-7) em auxílio à compreensão *modus operandi* do axioma. Se já temos como existente o conjunto *z* de animais enquanto um conjunto bem definido, nós podemos fazer

---

[5] O programa logicista fregeano foi sem dúvida alguma uma das principais vítimas do paradoxo de Russell. O famigerado *Axioma V* utilizado por Frege no *Grundgesetze* está em consonância com o princípio da compreensão na medida em que ele correlaciona propriedades a extensões:

$$\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \equiv \{x \mid Fx\} = \{x \mid Gx\}$$

onde $\{x \mid Fx\}$ é o conjunto que denota a extensão de uma propriedade F. Portanto, se definirmos a relação lógica $\in$ da seguinte forma, $x \in Y \leftrightarrow \exists P(Px \wedge Y=\{z \mid Pz\})$, obtemos as seguintes equivalências:

$x \in \{z \mid Fz\} \leftrightarrow \exists P(Px \wedge \{z \mid Fz\}=\{z \mid Pz\})$
$\leftrightarrow \exists P(Px \wedge \forall x(Fx \leftrightarrow Px))$
$\leftrightarrow Fx$

Caso o nosso conjunto seja o conjunto paradoxal de Russell $R=\{x \mid x \notin x\}$, então $\forall x(x \in R \leftrightarrow x \notin x)$ e, consequentemente, $R \in R \leftrightarrow R \notin R$. Temos agora o paradoxo de Russell sendo gerado dentro do logicismo fregeano. Tanto o *Axioma V* quanto o princípio da compreensão são instâncias de procedimentos de abstração. Para uma leitura introdutória sobre a correlação entre princípios de abstração e o logicismo fregeano cf. Pontes (2013).

[6] O axioma da separação foi precisamente introduzido em Zermelo, E. (1908) "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre: I", *Math. Annalen*, vol. 65, pp. 261-81.

uso do axioma da separação para afirmar a existência do conjunto *y* composto exclusivamente pelos membros *x* de *z* que satisfazem a condição de ser humano. Em outras palavras, a propriedade de ser um humano permite-nos separar os homens da totalidade dos animais.

É importante notar que tanto o princípio da compreensão quanto o axioma da separação foram construídos com base na pressuposição de que é perfeitamente claro e não problemático quais tipos de fórmulas podem substituir a condição $\varphi(x)$. No entanto, como mostra o paradoxo de Russell, essa pressuposição falha fragorosamente. Suppes destaca que, ao formular o axioma esquema da separação, Zermelo pretendia que tal esquema fosse instanciado exclusivamente em termos de questões ou enunciados que expressassem na posição $\varphi(x)$ condições ou propriedades bem definidas, ou seja, condições ou propriedades para as quais possuímos critérios não arbitrários para decidir quando um objeto satisfaz a condição ou propriedade em questão.

Ainda sobre o axioma da separação, ele permite definir elegantemente noções como a de interseção ($\cap$) de conjuntos e a de complemento. Além disso, fazendo uso dele é possível mostrar através de um pequeno número de passos que a partir de tal esquema não é possível obter o paradoxo de Russell. Usando a condição $\neg(x \in x)$ proposta por Russell para instanciar o esquema da separação obtemos a seguinte sentença:

(1) $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \neg(x \in x)))$

e assumindo o caso particular onde $x=y$, temos:

(2) $y \in y \leftrightarrow (y \in z \wedge \neg(y \in y))$

que não é de modo algum uma contradição. O caso $x=y$ simula aqui o mesmo procedimento impredicativo realizado sob o conjunto R do paradoxo de Russell. A rigor, o conjunto R não pode pertencer a si mesmo porque ele sequer pertence ao conjunto *z* pré-estabelecido.

Em verdade, como Potter (2004: p.25-6) chama atenção, outros paradoxos já haviam sido demonstrados no seio da teoria ingênua dos conjuntos envolvendo, especialmente, noções como as de número cardinal e ordinal. O próprio Cantor afirmou em carta endereçada à Hilbert em 1897 que o conjunto de todos os *alephs* não pode ser interpretado como um conjunto fechado e bem definido. No entanto, foi certamente o paradoxo de Russell o primeiro a ser obtido com base em noções e princípios puramente lógicos. Russell mostrou que para qualquer relação binária R vale que: $\neg\exists y\forall x(xRy \leftrightarrow \neg(xRx))$.

Um resultado análogo ao de Russell e que ficou conhecido como *paradoxo de Curry* foi obtido sem fazer uso do operador de negação presente em $\neg(x\in x)$. Esse resultado obtido pelo lógico estadunidense Haskell Curry pode ser apresentado substituindo a condição proposta por Russell pela condição $x\in x\rightarrow$B, onde B é uma sentença qualquer. Desse modo, dado o esquema geral:[7]

(i) $\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow\varphi x)$

que expressa uma forma concisa do princípio da compreensão apresentado acima, ao substituir a variável φ pela condição $x\in x\rightarrow$B obtemos a seguinte sentença:

(ii) $\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow(x\in x\rightarrow \mathrm{B}))$

Assumindo o termo c para denominar o conjunto y em questão, temos:

(iii) $\forall x(x\in \mathrm{c}\leftrightarrow(x\in x\rightarrow \mathrm{B}))$

Finalmente, ao instanciarmos a quantificação universal em (iii) para o caso c, obtemos:

(iv) $\mathrm{c}\in\mathrm{c}\leftrightarrow(\mathrm{c}\in\mathrm{c}\rightarrow\mathrm{B})$

Por eliminação do bicondicional em (iv):

(v) $\mathrm{c}\in\mathrm{c}\rightarrow(\mathrm{c}\in\mathrm{c}\rightarrow\mathrm{B})$

e

(vi) $(\mathrm{c}\in\mathrm{c}\rightarrow\mathrm{B})\rightarrow\mathrm{c}\in\mathrm{c}$

Uma vez que a lei de contração afirma que: $(\alpha\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow(\alpha\rightarrow\beta)$, então, a partir de (v) temos:

(vii) $\mathrm{c}\in\mathrm{c}\rightarrow\mathrm{B}$

e por *modus ponens* de (vi) e (vii):

(viii) $\mathrm{c}\in\mathrm{c}$

e, por *modus ponens* de (vii) e (viii):

(ix) B

O resultado obtido por Curry é fantástico! A ideia básica, em última instância, é mostrar que algumas operações admitidas na teoria ingênua envolvendo conjuntos de conjuntos podem conduzir a uma trivialização dedutiva da teoria dos conjuntos onde essa operação foi definida. No caso da formalização

[7] Para a demonstração do paradoxo de Curry, sigo a demonstração apresentada em Da Costa *et. al.* (1998).

do paradoxo de Curry expressa acima, a ideia de que um conjunto que pertence a si mesmo pode provocar uma trivialização dedutiva terá sérias consequências para a ideia de uma totalidade irrestrita entendida enquanto um conjunto de absolutamente tudo, i. e., o famigerado conjunto universo. No último capítulo eu terei oportunidade de entrar em mais detalhes na relação entre contradições e trivialização dedutiva.

1.2.2 O Teorema de Cantor e a concepção iterativa de conjuntos

A concepção iterativa de conjunto está por trás de muitos dos mais importantes resultados da teoria axiomática dos conjuntos, dentre os quais o mais relevante para os objetivos da presente tese é certamente o *Teorema de Cantor*; algumas vezes também chamado de teorema do conjunto potência. A influência que esse teorema exerce no tratamento do problema da quantificação irrestrita e da legitimidade da generalidade absoluta, em grande parte, provém da caracterização do conceito de conjunto enquanto um conceito indefinidamente extensível, ou seja, um conceito cuja extensão pode ser ampliada de maneira indefinida por intermédio de procedimentos bem definidos na teoria dos conjuntos. Isso tudo, unido à concepção de que, caso legítima, a generalidade absoluta deve ser semanticamente entendida enquanto um conjunto de absolutamente tudo, ou ainda, um conjunto maximal, produz uma tensão aparentemente insuperável com implicações relevantes na quantificação irrestrita. Sem dúvida alguma, há aqui um forte paralelismo entre os resultados de Cantor sobre o infinito e seus resultados sobre a concepção iterativa de conjuntos. Dificilmente Cantor figuraria nas primeiras posições de um ranking dos melhores filósofos de todos os tempos, mas certamente seus trabalhos sobre totalidades e o infinito revelaram mais sobre esses conceitos do que os trabalhos de qualquer outro filósofo da história.

Vejamos, em linhas gerais, no que consiste o teorema de Cantor. Em primeiro lugar, chamamos de *conjunto potência*[8] ao conjunto formado por todos

[8] De acordo com Belna (2011: pp. 120-121), ao introduzir a noção de potência Cantor inspirou-se em um tratado de geometria projetiva famoso em sua época e publicado pelo matemático suíço Jacob Steiner. No tratado em questão, Steiner fazia uso da noção para expressar que duas figuras se relacionam uma com a outra por projeção, ou seja, que cada elemento de uma figura está associado a um, e somente um, elemento da outra figura. Desse modo, dizemos que duas figuras

os subconjuntos de um dado conjunto. É também usual falar do conjunto potência como o conjunto das partes de um conjunto. O que Cantor provou com seu famoso resultado é que todo conjunto ou coleção possui mais subconjuntos que membros, ou ainda, que não há uma correspondência biunívoca entre os membros de um conjunto S qualquer e os subconjuntos de S, pois o conjunto formado pelos subconjuntos de S possui uma cardinalidade maior que a de S. Por exemplo, o conjunto potência do conjunto A={1;2} que possui 2 elementos é o conjunto $\wp$(A)={{1}; {2}; {1,2}; ∅} composto por 4 elementos. A relação precisa entre a cardinalidade de um conjunto S e a cardinalidade de seu conjunto potência $\wp$(S) é dada pela fórmula $c=2^n$ onde n é o número de elementos de S e c é o número de elementos de $\wp$(S).

De certo modo, o resultado de Cantor parece mesmo óbvio para conjuntos finitos, dado que todo conjunto $\wp$(S) – o conjunto potência de um conjunto S qualquer –, sendo S finito, possui sempre entre seus membros, conjuntos unitários formados, cada um deles, por um elemento de S e mais o próprio conjunto S. Isso, por si só, já garantiria uma maior cardinalidade de $\wp$(S). No entanto, Cantor foi além ao mostrar de maneira precisa e exaustiva a relação estabelecida entre os conjuntos e seus respectivos conjuntos potências. A prova de Cantor revela que tal relação ocorre também para conjuntos infinitos. Como pode ser observado a seguir, a prova de Cantor possui, assim como o paradoxo de Russell, a estrutura de uma *reductio*.

> ***Prova*:** Seja S um conjunto qualquer e $\wp$(S) seu conjunto potência. Suponhamos que haja uma função biunívoca *f(s)* que associa a cada membro *m* de S um distinto subconjunto *s* de S sendo, portanto, *s* um membro de $\wp$(S). Alguns membros *m* de S podem ser também membros do subconjunto associado a ele por *f(s)*. Por exemplo, seja $s=\{a\}$ e $m=a$ onde *a* está associado a *s* por intermédio de *f(s)*, então $a \in s$; em caso contrário, $a \notin s$. Considere então o conjunto W constituído por todo membro de S que não é membro do subconjunto associado a ele por *f(s)*. Obviamente, como W é ele próprio um subconjunto de S e, consequentemente, um membro de $\wp$(S), W deve estar mapeado na função *f(s)*. Com isso, há um membro *r* de S tal que $f(\mathrm{W})=r$. Considere que $r \in \mathrm{W}$. Uma vez que definimos W como o conjunto de todos os membros *m* de S que não pertencem ao subconjunto *s* tal que $f(s)=m$, no caso de *r* e $f(\mathrm{W})$, se $r \in \mathrm{W}$, então

tem a mesma potência caso a projeção estabeleça uma bijeção. *Mutatis mutandis*, em teoria dos conjuntos esse mesmo princípio ajuda a definir a noção de biunivocidade, bem como as relações de *ter mesma cardinalidade que* e *ter mesma potência que*.

> $r \notin$W. Do mesmo modo, pode-se verificar que o inverso também ocorre: se $r \notin$W, então $r \in$W. Ou seja, $r \in$W$\leftrightarrow r \notin$W; o que é uma contradição. Como *r* é um membro arbitrário de S, o que a contradição mostra é que não há nenhum elemento de S que esteja associado ao subconjunto W de S. Portanto, negando a suposição inicial que levou à contradição, não há uma correspondência biunívoca entre os membros de um conjunto S e os subconjuntos de S. Para qualquer conjunto S, há mais subconjuntos de S que membros de S.[9] ■

Para estender o resultado acima para conjuntos infinitos, a *reductio* de Cantor pode ser apresentada de maneira análoga ao *argumento diagonal* utilizado para provar que a cardinalidade dos números irracionais, e consequentemente a dos reais, é maior que a cardinalidade dos naturais.

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	...
s_1	✓	✓		✓		
s_2			✓		✓	
s_3		✓	✓	✓		
s_4	✓					
s_5		✓			✓	
⋮	✓		✓	✓		

Tabela 1 – Argumento diagonal

Supondo que o conjunto S em questão seja infinito, a Tabela 1 acima apresenta a correlação entre os membros e os subconjuntos de S. As colunas m_1,m_2, m_3, m_4,m_5,... apresentam a lista dos infinitos membros de S, ao passo que as linhas $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, ...$ correspondem à lista dos subconjuntos de S. As marcas de checagem "✓" indicam quais membros *m* de S pertencem ao subconjunto *s* em questão. Por exemplo, o subconjunto s_1 é composto pelos membros m_1, m_2, m_4 de S, ou seja, s_1 = $\{m_1, m_2, m_4\}$. Podemos facilmente gerar o problemático subconjunto W de S através da diagonalização de Cantor selecionando apenas os membros *m* de S que não possuem marca de checagem onde a seta diagonal da tabela os intercepta. Dois exemplos são os membros m_2, m_4. Dado que W é um subconjunto de S, ele próprio deve figurar como uma das linhas da Tabela 1 e, portanto, a seta

[9] A presente reconstrução da prova do Teorema de Cantor segue, em linhas gerais, a estrutura encontrada no texto de Klement (2010: p.17).

diagonal deve interceptá-lo também quando passar por algum membro m_n. Nesse caso, dada as condições estabelecidas, m_n possuirá marca de checagem apenas caso ele não a possua; o que é obviamente uma contradição. Com isso, embora W seja um subconjunto legítimo de S, ele não pode figurar na Tabela 1 que pretende estabelecer uma correspondência biunívoca entre os membros e os subconjuntos de S. Portanto, mesmo sendo S um conjunto infinito, o número de seus subconjuntos excede o número de seus membros.

Alguns importantes resultados que correlacionam a cardinalidade de conjuntos e estabelecem relações entre membros de diferentes conjuntos podem ser obtidos a partir do teorema de Cantor e da noção de função. Em primeiro lugar, sendo A e B dois conjuntos quaisquer, caso haja uma função injetora[10] f: A↦B [uma função injetora de membros de A em membros de B] e uma função injetora g: B↦A [uma função injetora de membros de B em membros de A], então deve haver uma função bijetora[11] h: A↦B; o que na prática equivale a dizer que os conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade. Esse resultado está expresso no famoso e importante teorema de Cantor-Schröder-Bernstein.[12] Ele também pode ser expresso dispensando o uso explícito da noção de função do seguinte modo: se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$; onde o símbolo $|X|$ designa a cardinalidade do conjunto X em questão.

No entanto, por trás do resultado de Cantor, a consequência mais relevante para os objetivos do presente trabalho é aquela que diz respeito à concepção iterativa de conjuntos e suas consequências para o conjunto universo. No núcleo do teorema de Cantor encontra-se a ideia de que dado qualquer conjunto, existem operações básicas – tais como a de potência – que permitem produzir conjuntos com maior número de elementos que o do conjunto em questão. Temos aqui novamente a característica fundamental de uma teoria dos conjuntos construída com base em uma hierarquia cumulativa. Obviamente, assim como no paradoxo do Russell, essa concepção de conjuntos eliminará a possibilidade de um conjunto

[10] Dizemos de uma função f: X↦Y que ela é *injetora* quando ela obedece aos seguintes critérios:

$$\forall x_1 x_2 \in X, \quad x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Em outras palavras, isso é o mesmo que dizer que dois diferentes elementos do domínio mapeiam diferentes elementos do contradomínio.

[11] Dizemos de uma função f: X↦Y que ela é *bijetora* quando ela, além de ser uma função injetora, é também *sobrejetora*, ou seja, em f todo elemento de Y é mapeado por um, e somente um, elemento de X.

[12] Uma demonstração do teorema de Cantor-Schröder-Bernstein pode ser encontrada em Velleman (2006: pp. 322-27).

maximal ou absoluto, tal como o conjunto universo. Eu retornarei a esse ponto em mais detalhes no próximo capítulo ao discutir domínio para quantificações irrestritas.

É importante ressaltar aqui que o resultado obtido por Cantor não é de maneira alguma o único a revelar a concepção iterativa presente na moderna teoria dos conjuntos. Muitos outros resultados poderiam ser apresentados com semelhante finalidade. Um outro exemplo pode ser apresentado com base no paradoxo de Mirimanoff publicado em 1917. O resultado obtido por Mirimanoff, dentre outras coisas, expõe também a inconsistência de uma classe absoluta no sentido que apresento a seguir. Em seu trabalho, Mirimanoff descreve um procedimento simples de sucessivas aplicações da operação de potência – iniciando com o conjunto vazio (∅) – onde damos origem a uma hierarquia infinita na qual cada nível *n*+1 é formado pelo conjunto potência do conjunto apresentado no nível *n* anterior. Essa hierarquia envolve o que podemos chamar de classes "básicas", ou seja, toda classe α para a qual, dada uma sequência de classes x_0, x_1, x_2, ... , α, não é possível estabelecer a relação de pertença do tipo $x_0 \in x_1 \in x_2 \in \ldots \in \alpha$.

Obviamente, dado que o conjunto potência é o conjunto dos subconjuntos de um dado conjunto e que, como vimos acima, todo conjunto é subconjunto de si mesmo, então, na hierarquia de Mirimanoff, o conjunto x_n do nível *n* estará numa relação de pertença com o conjunto x_{n+1} do nível *n*+1, onde $x_n \in x_{n+1}$. Podemos pensar na sequência M de Mirimanoff do seguinte modo:

(M) $x_0 \in x_1 \in \ldots \in x_n \in x_{n+1} \in \ldots$

Supondo que possamos realizar essa operação sugerida por Mirimanoff até um estágio limite, ou seja, que possamos construí-la passo a passo até um nível final, este nível seria constituído por um conjunto R chamado *hierarquia cumulativa*. Com isso, dado o processo cumulativo de geração de cada nível *n* da sequência de Mirimanoff, fica claro que se há algo como o conjunto limite R, então ele deve possuir todos os outros conjuntos da hierarquia como membros. Em outras palavras, R seria o conjunto de todas as classes básicas. Nesse contexto, podemos reconstruir a sequência – que chamarei de sequência M* de Mirimanoff – com R como estágio final

(M*) $x_0 \in x_1 \in \ldots \in x_n \in x_{n+1} \in \ldots \in \mathrm{R}$

A questão que se impõe aqui é a seguinte: R é uma classe básica? Em caso afirmativo, então R∈R, dado que R foi apresentada a nós como a classe de todas as classes básicas; e, nesse caso, R não seria uma classe básica. Em caso negativo, então deve haver uma sequência de relações de pertença terminada em R do tipo $x_0 \in x_1 \in ... \in x_n \in x_{n+1} \in ... \in$R, onde x_0 não é uma classe básica e, consequentemente, não poderá ser um membro de R; o que contraria o modo como construímos deliberadamente a sequência de Mirimanoff em M*.

O paradoxo de Mirimanoff está na base de discussão associada ao *axioma da regularidade* – também chamado de axioma da fundação – presente em ZFC, segundo o qual o domínio dos conjuntos é bem ordenado – ou bem fundado – para a relação de pertença (∈). Em outras palavras, o axioma em questão garante que nenhum conjunto é membro de si mesmo:

$\forall x\ (x \notin x)$

e que não é possível nenhuma cadeia para a relação de pertença do tipo:

$x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x$

Como um caso especial da impossibilidade dessas cadeias podemos mostrar que para dois conjuntos quaisquer, eles não podem ser ambos elementos um do outro:

$\forall x \forall y\ \neg(x \in y \wedge y \in x)$

Dizemos de um conjunto S qualquer que ele não é bem fundado quando um de seus elementos, ou um elemento de elemento, ou ainda um elemento de elemento de elemento, e assim por diante, é o próprio conjunto S. Nesse caso, o axioma da regularidade pretende estabelecer que nenhum conjunto satisfaça a propriedade $x \in x$. O axioma da regularidade foi introduzido em ZFC por Johann von Neumann em 1929 com a função de evitar paradoxos de auto-referencialidade tal como ocorre no paradoxo de Russell. Como consequência direta do axioma, temos que nenhum conjunto pertence a si mesmo. Desse modo, fica fácil perceber que esse axioma também estabelece sérias restrições que inviabilizam o conjunto universo.

Uma formalização do axioma da regularidade pode ser dada com segue:

$\forall x\ (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y\ (y \in \mathrm{x} \wedge \forall z\ (z \in x \rightarrow z \notin y)))$ **Axioma da Regularidade**

Obviamente, sequências infinitas descendentes formadas pela relação de pertença – a exemplo da sequência M* acima, tomada de maneira regressiva –

também não são possíveis a partir do axioma da regularidade. Consequentemente, essa impossibilidade bloqueia o paradoxo de Mirimanoff. Nesse contexto, para qualquer conjunto *z*, toda sequência da forma $a \in b \in c \in \ldots \in z$ que se pretenda consistente, deve ser finita e o último elo da sequência não representa um conjunto absoluto. Novamente, temos aqui um axioma que reflete a concepção iterativa de conjuntos na medida em que ele impossibilita um conjunto maximal em pelo menos dois aspectos: (i) dado que tal conjunto, caso ele existisse, deveria pertencer a si mesmo, pois ele seria o conjunto de absolutamente todos os conjuntos; possibilidade essa barrada pelo axioma da regularidade; (ii) esse mesmo conjunto deveria figurar como o elo R da sequência descrita anteriormente; mas tal sequência é ilegítima.

1.2.3 Dois resultados e uma mesma direção

Há uma estreita correlação entre o teorema de Cantor e o paradoxo de Russell. O próprio Russell assumiu explicitamente em várias de suas obras que foi levado ao paradoxo que leva seu nome através da reflexão sobre o resultado obtido por Cantor.[13] Russell concebeu seu conjunto paradoxal "conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmo" em sintonia com a ideia expressa no teorema de Cantor. Ambos os resultados impõem restrições à formação de determinados conjuntos que parecem, à primeira vista, legítimos. Talvez o caso paradigmático de tais conjuntos que o teorema de Cantor condenou seja o famigerado conjunto universo. Em princípio, concebido como o conjunto de tudo aquilo que há, o conjunto universo U não poderia ter um número menor de elementos do que o de subconjuntos, uma vez que todo subconjunto de U é também um elemento de U, pois, por definição, nada está fora de U. Obviamente, o conjunto U é incompatível com o teorema de Cantor; o que o torna ilegítimo na ótica da teoria axiomática dos conjuntos ZFC que o trabalho de Cantor ajudou a construir. Essa ilegitimidade do conjunto universo estará no centro da polêmica acerca da legitimidade de quantificações irrestritas que será apresentada no próximo capítulo.

[13] Cf. Russell (1903: 100; 1919: 136; 1958: 158; 1998: 150).

Com o objetivo de explorar ainda mais as relações entre a concepção cantoriana de conjunto e sua compreensão do infinito, podemos ressaltar que o trabalho de Cantor aponta na direção do entendimento do conjunto universo enquanto a totalidade infinita atual e não expansível que costumeiramente chamamos de *absoluto*; e que o teorema de Cantor mostra ser ilegítimo. No entanto, a compreensão iterativa de conjuntos revela a extensão do conceito de conjunto enquanto uma totalidade infinita atual, mas em constante expansão; algo análogo à estrutura dos ordinais e ao procedimento de geração dos *transfinitos* de Cantor. Não por acaso, a prova apresentada acima para o teorema de Cantor faz uso da mesma estratégia de diagonalização presente na prova da não enumerabilidade dos irracionais.

Retomando essa correlação entre os resultados de Russell e Cantor, muitas das estratégias usadas para superar o paradoxo de Russell são, em geral, aplicadas também, *mutatis mutandis*, com o objetivo de oferecer uma análise detalhada das consequências do teorema de Cantor e de superação dos limites que ele impõe à teoria dos conjuntos. O próprio Russell (1907) descreveu três estratégias básicas adotadas por diferentes variantes de ZFC que visam o ataque e superação de seu paradoxo e, consequentemente, do teorema de Cantor. A ideia básica que perpassa cada uma delas é apresentar um modo consistente de explicar o fato de que uma função proposicional nem sempre determina um conjunto, ou seja, propor algum princípio que exclua os casos problemáticos onde as supostas funções proposicionais não determinam conjuntos. De certo modo, essas estratégias dominam ainda hoje os trabalhos acadêmicos sobre o tema enquanto alternativas à ZFC. São elas: (i) a teoria da limitação de tamanho (*theories of limitation of size*); (ii) a teoria zig-zag (*zigzag theory*) e (iii) a teoria sem classes (*no class theory*).

A teoria da limitação de tamanho surgiu como forma de superar alguns dos impasses presentes na concepção iterativa de ZFC e também da teoria ingênua por meio da formulação de teorias alternativas dos conjuntos com base na reinterpretação de alguns termos básicos. Ela é representada por sistemas tais como a teoria dos conjuntos de Neumann-Bernays-Gödel (NBG) e a de Kelley-Morse, que operam como extensões de ZFC mais comumente formalizadas a partir de uma lógica de segunda ordem. Em ambas as teorias há uma distinção básica entre os termos “conjunto” – que é entendido de maneira usual – e “classe própria” que designa um agregado tão grande e irrestrito de membros que, portanto, contém todo membro de qualquer conjunto ou classe. Em outras palavras, a classe própria opera como um análogo do conjunto universo; porém legítimo e não paradoxal. Obviamente, nas teorias dos conjuntos fundadas a partir de princípios de limitação de tamanho a classe própria deve estar submetida a determinadas restrições para que possam ser evitados resultados similares aos de Russell e Cantor com relação à teoria usual dos conjuntos. Embora uma classe própria possa figurar como a classe de todos os conjuntos, ela não pode de maneira alguma ser membro de si mesma e, além disso, não há subclasses que possam figurar como membros da classe em questão. As teorias dos conjuntos tais como a NBG evitam assim o uso irrestrito do princípio da compreensão, na medida em que nem toda propriedade define um conjunto legítimo, e, ao mesmo tempo, barram a aplicação da operação de potência à classe própria.

Boolos (1998c: p. 90) afirma que as teorias de limitação de tamanho podem ser agrupadas e descritas em pelo menos duas versões que apresento a seguir de maneira informal. Em sua versão forte, ela assume que objetos formam conjuntos se, e somente se, eles não estão em uma correspondência biunívoca com todos os objetos que há. Por outro lado, em sua versão fraca, uma teoria de limitação de tamanho é caracterizada pela tese de que não há conjuntos cujos membros estão em uma correspondência biunívoca com todos os objetos, mas objetos formam conjuntos se eles estão em uma correspondência biunívoca com os membros de um dado conjunto. Para Boolos, a diferença entre as duas versões é que a mais fraca não garante que objetos sempre formarão conjuntos se eles não estão em uma correspondência biunívoca com todos os objetos que há.

Já a abordagem desenvolvida pela teoria zig-zag garante a intuição de que toda propriedade legítima pode ser expressa por um predicado e a ela corresponde um conjunto enquanto sua extensão. Contudo, tal abordagem limita essa intuição a conjuntos obtidos a partir de propriedades ordinárias, ou seja, aquelas que podem ser expressas predicativamente. Uma condição ou propriedade apresentada por um predicado sintaticamente bem formado, mas que é expresso por meio de uma impredicatividade, não deve estar associada a um conjunto. Obviamente, uma axiomatização dessa teoria só pode admitir entre seus axiomas funções ou propriedades que possam ser expressas predicativamente. Isso conduz a uma das principais objeções a essa estratégia, uma vez que a exclusiva admissão de axiomas de caráter predicativo tornaria esses mesmos axiomas muito complexos;

o que dificultaria bastante a tarefa de produzir uma prova de consistência da teoria zig-zag.

Por fim, a teoria sem classes é, sem dúvida alguma, a mais radical estratégia descrita por Russell para evitar os agregados inconsistentes revelados pelos paradoxos da teoria dos conjuntos. Nesta teoria, como o próprio nome já indica, classes, conjuntos e relações são banidos em favor de uma truncada interpretação substitucional de proposições. Em verdade, a ideia presente em tal teoria é que nosso modo de falar em termos de conjuntos enquanto entidades é apenas uma abreviação operacionalmente conveniente dessas interpretações substitucionais sobre proposições. Não entrarei em detalhe aqui no modo de operar dessa estratégia para não me desviar dos objetivos principais deste capítulo, mas vale ressaltar que nela, funções não determinam classes ou relações no sentido usual desses termos. Algumas das principais críticas à teoria sem classes passa pela ideia de que classes e funções parecem em certo sentido tão óbvias que fica difícil ver, por exemplo, como a matemática dos transfinitos construída por Cantor poderia ser pensada sem essas noções. Além disso, a ausência de classes deixaria a interpretação de várias teorias matemáticas tão truncadas que a tarefa de demonstrar os teoremas dentro de tais teorias seria muito mais complexa.

Nenhuma dessas estratégias serão trabalhadas de maneira exaustiva ao longo deste trabalho. No entanto, uma compreensão do que está em jogo em cada uma delas ajudará na compreensão mais geral das inúmeras abordagens do problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta; especialmente no que diz respeito às defesas da possibilidade de um discurso formal sobre totalidades irrestritas. Os desafios impostos pela concepção iterativa de conjuntos são também filosoficamente estimulantes dado que vários de nossos conceitos possuem um caráter indefinidamente extensível tal como o conceito de conjunto, ou seja, eles possuem uma extensão à qual sempre podemos acrescentar mais um membro em um processo infinito de expansão da extensão do conceito ou da totalidade de itens que satisfazem o conceito.

***

Ao longo deste capítulo busquei apresentar algumas noções modelo teoréticas básicas que operam sobre nossas sentenças com a ocorrência dos quantificadores da lógica de predicados "∃" e "∀" e que são, portanto, indispensáveis para a compreensão dos limites de expressão dessas mesmas sentenças. Tentei também mostrar em que medida o estatuto semântico dessas quantificações está associado e, portanto, dependente da teoria dos conjuntos. A ideia básica é que o domínio para tais quantificações é entendido na semântica padrão como um conjunto. Esta relação entre quantificações irrestritas e teoria dos conjuntos marcada pelo que chamei de semântica padrão será explorada amiúde ao longo da presente tese, sempre protagonizando a polêmica que move o debate sobre a possibilidade de um discurso absolutamente geral. No contexto de uma apresentação panorâmica da teoria dos conjuntos, um cuidadoso destaque foi dado a alguns resultados – em especial o teorema de Cantor e o paradoxo de Russell – que cumprirão um papel central na discussão sobre a legitimidade de quantificações que será apresentada no próximo capítulo. Sem um razoável domínio dos aspectos técnicos apresentados nesse primeiro capítulo, o debate sobre a quantificação irrestrita e nossa capacidade de lidar formalmente com uma generalidade absoluta seria simplesmente ininteligível. Por um lado, o que foi exposto neste capítulo pode ser muito primário ao leitor virtuoso em lógica. Minha intenção não foi a de postergar ao leitor iniciado o debate central deste trabalho, mas a de oferecer ao leitor não iniciado uma propedêutica necessária ao caminho que será percorrido a partir de então.

2
FALANDO SOBRE ABSOLUTAMENTE TUDO
Quantificações irrestritas e generalidade absoluta

Agora que temos uma compreensão panorâmica dos traços gerais do que denominei semântica padrão e da forma em que nela as sentenças quantificadas estão associadas a conjuntos enquanto domínios de quantificações, pretendo nesse segundo momento apresentar uma distinção entre modos de quantificar no que diz respeito ao alcance do discurso. Para isso, alguns esclarecimentos conceituais preliminares são importantes. Vejamos alguns deles a seguir.

É digno de nota que todos os nossos discursos são dotados de um alcance. A generalidade é uma propriedade do discurso – ou de asserções específicas –, bem como, dos pensamentos por ele expresso. Nesse sentido, a generalidade diz respeito ao alcance do discurso. Intuitivamente, diferentes graus de generalidade podem ocorrer. Falamos, por exemplo, de uma generalidade relativa quando o discurso diz respeito a uma totalidade restrita de objetos, ou ainda de uma generalidade absoluta quando a totalidade dos objetos do discurso é absolutamente inclusiva. Nesse último caso, nada escapa ao alcance do discurso. Se pensarmos em termos de um discurso formal, a generalidade é expressa por meio de quantificadores. Em verdade, uma quantificação universal é um mecanismo formal a partir do qual expressamos verdades gerais, ou seja, afirmações sobre generalidades. Por fim, como vimos na anterior apresentação da semântica padrão, o domínio – ou universo do discurso – é parte estruturante das chamadas "interpretações" dos quantificadores em teoria dos modelos.

Desse modo, existem diferentes graus de generalidade dependendo do alcance pretendido pela afirmação e a esses diferentes graus correspondem diferentes tamanhos possíveis do domínio da quantificação. Na prática, isso opera do seguinte modo. Quando afirmo que "todas as cervejas estão na geladeira" e que "tudo é idêntico a si mesmo" estou, em ambos os casos, expressando algo sobre generalidades, ou melhor, pretensas verdades gerais. No entanto, com a primeira sentença estou infelizmente expressando apenas algo sobre uma generalidade restrita. Seria ótimo que todas as cervejas que existem estivessem na minha geladeira, pois eu poderia promover uma festa épica com elas, mas estão na minha geladeira apenas as cervejas de um contexto relevante; por exemplo, as que comprei no supermercado ontem à noite. Já, se os metafísicos estão corretos, na segunda sentença o que está em jogo é uma generalidade absoluta, pois o complemento do universo do discurso é vazio. O alcance do discurso nesse segundo caso é ilimitado e a quantificação dita irrestrita. A sentença em questão pretende expressar que absolutamente tudo é idêntico a si mesmo. Em princípio, não há nada que não satisfaça a afirmação.

De maneira técnica, dizemos que uma quantificação universal é restrita quando o domínio associado ao quantificador constituí uma totalidade cujo complemento é não vazio. Em outras palavras, em uma quantificação restrita, há pelo menos um objeto que escapa o domínio do discurso associado ao quantificador e, portanto, esse domínio comporta ou constitui uma generalidade limitada; como ocorre no caso das cervejas em minha geladeira. Desse modo, uma sentença do tipo "Tudo é F" constitui uma quantificação restrita verdadeira na medida em que ela é associada a um contexto C de destaque com complemento não vazio – há pelo menos um item x que não pertence a C – e todo item pertencente a C satisfaz a propriedade F. Nesse caso, a expressão "tudo" percorre um domínio restrito e contextualmente relevante de coisas.

Em contrapartida, uma quantificação é dita irrestrita caso o domínio associado ao quantificador constitua uma totalidade igualmente irrestrita. Nesse caso, o uso do quantificador não carrega consigo nenhuma limitação implícita ou explícita ao tamanho do domínio contextualmente relevante de objetos. Podemos dizer ainda que o domínio em questão é absoluto, ou seja, que ele abrange tudo o que há. Mas o que determina o tamanho do domínio de uma quantificação? É importante aqui destacar que diferentes aspectos – semânticos, pragmáticos, dentre outros – podem agir de modo a restringir ou não o domínio de um discurso determinando assim a quantidade de objetos que este comporta. São esses aspectos que caracterizam o contexto a partir do qual devemos entender as sentenças em geral; e isso inclui obviamente nossas sentenças quantificadas. O contexto é, portanto, um parâmetro imprescindível para a avaliação semântico e/ou pragmática de uma sentença. Um contexto C de discurso que não impõe restrições ao tamanho do domínio de uma quantificação do tipo "Tudo é F" determina também que o domínio associado a essa quantificação possui um complemento vazio; não há nenhum item que não seja compreendido por tal domínio. Podemos ainda afirmar que o alcance do discurso é absoluto e que, caso a sentença seja verdadeira, absolutamente tudo satisfaz a propriedade F. Desse modo, sendo a quantificação universal acima irrestrita, o tamanho do domínio estabelecido pelo contexto do discurso é uma generalidade absoluta. A história da filosofia consagrou a compreensão parmenidiana do Ser como a contraparte metafísica por excelência dessa generalidade absoluta. Ao afirmar "o Ser é; o não-ser não é", Parmênides estava expressando o caráter absoluto do Ser. Absolutamente nada está fora do seu escopo.

Tanto a quantificação restrita quanto a irrestrita encontram-se hoje envoltas em grandes disputas lógicas e filosóficas. No que diz respeito à quantificação restrita, dado que existem múltiplas formas de restrição de domínios de quantificação, o grande desafio é estabelecer uma teoria geral que permita explicitar, para cada caso, que tipo de mecanismo de restrição está sendo usado e como esses tipos operam tanto sintático como semanticamente. Como exemplos desses diferentes mecanismos de restrição de domínio de quantificação temos: sortal; pragmático; semântico; etc. Por outro lado, a quantificação irrestrita é fonte de uma polêmica, por assim dizer, ainda mais dramática. Apesar da ausência de uma teoria geral de restrição de domínios de quantificação, ninguém ataca seriamente a credibilidade de quantificações restritas. A ocorrência de tais quantificações é um fato semântico e formal indisputável. Há um consenso de que quantificações restritas fazem parte da prática linguística cotidiana. No entanto, a semântica padrão dos quantificadores fundada na concepção iterativa dos conjuntos apresentada no capítulo anterior criou obstáculos técnicos fundamentais para o estabelecimento de modelos para quantificações irrestritas. Ao que tudo indica, a semântica padrão dos quantificadores é incompatível com quantificações irrestritas e com a generalidade absoluta estabelecida pelo suposto domínio dessas quantificações. No presente capítulo, pretendo apresentar os principais argumentos em favor dessa última afirmação e um pouco do debate filosófico que a sustenta. Para isso, será de fundamental importância retomar alguns dos resultados apresentados no capítulo 1 – especialmente o paradoxo de Russell e o teorema de Cantor – aplicando-os agora diretamente ao problema da legitimidade da quantificação irrestrita e da existência de uma generalidade absoluta.

Dito de maneira direta, o problema fundamental envolvendo o tópico da quantificação irrestrita é exatamente saber se tais quantificações são de fato possíveis. Em outras palavras, se existem usos de quantificadores em que absolutamente nenhum objeto seja excluído como irrelevante para o contexto do discurso; ou seja, usos em que não se exclua objeto algum do domínio da quantificação. Obviamente, caso a resposta a essa questão seja positiva, a quantificação irrestrita deve expressar uma generalidade absoluta.

Como mencionei anteriormente, um interessante aspecto formal das expressões quantitativas "todo" e "algum" é que elas podem ser interdefinidas com auxílio da negação clássica; e isso produz um efeito relevante no que diz respeito à quantificação irrestrita. Muitas das expressões que fazem uso de quantificadores e que são tão presentes na lógica formal podem ser reinterpretadas com base em expressões que supostamente envolvam uma quantificação irrestrita: "Nada é um F" é equivalente a "Tudo é não-F"; "Algo é F" pode ser reinterpretada como "Não é o caso que tudo é não-F". Em tese, a expressão "tudo" pode ser tomada de maneira irrestrita em todas essas reinterpretações das expressões quantificadas. Desse modo, o proponente de quantificações irrestritas pode alegar que tais quantificações estão presentes – mesmo que tacitamente – em uma vasta porção do nosso discurso cotidiano e de nossas teorias científicas e formais; portanto, nós não podemos ignorá-las.

A questão básica que se põe aqui é a da legitimidade de quantificações irrestritas. Sentenças expressando uma generalidade absoluta são formalmente possíveis? Caso elas não sejam impossíveis, quais as consequências básicas para o conhecimento humano? Caso elas sejam possíveis, o que legitima essa possibilidade? É importante notar que respostas a essas questões envolvem uma série de resultados técnicos e, por isso, dificilmente elas poderiam ser formuladas trivialmente. Por exemplo, suplementar uma sentença do tipo "Tudo é F" com a expressão "absolutamente" como em "Absolutamente tudo é F", por si só não torna a sentença em destaque irrestritamente quantificada. Podemos imaginar inúmeros casos onde sentenças deste último tipo podem ainda assim ter seu domínio de quantificação restringido por um contexto relevante e não absoluto de discurso. Ao afirmar "Estou sobrecarregado no trabalho. Sou responsável por absolutamente tudo!", temos claramente uma restrição de domínio do quantificador. Por razões óbvias dadas pelo contexto de proferimento, o falante não quer, com essa afirmação, expressar a ideia de que ele é responsável em absoluto por qualquer coisa que ocorra no universo, mas apenas em um contexto relevante de acontecimentos associados ao seu trabalho. Com isso, responder afirmativamente a questão da legitimidade de quantificações irrestritas envolve muito mais do que o acréscimo trivial do adjetivo “absoluto” a nossas afirmações gerais. Precisamos fundamentalmente executar a tarefa de mostrar que podemos prover modelos formais consistentes para tais quantificações que determinem através de critérios claros em quais situações estamos legitimamente empregando tais modelos.

2.1. Quantificações restritas e irrestritas: onde encontrá-las?

Uma rápida análise das mais diversas formas da prática linguística revela facilmente que as afirmações sobre totalidades compõem uma parte relevante de nossas descrições da realidade e estão extremamente presentes em nosso discurso cotidiano. Tais afirmações vêm frequentemente acompanhadas de algum tipo de restrição explícita ou implícita da totalidade descrita. Quando, ao entrar em um restaurante, alguém ouve do garçom que “todas as mesas estão ocupadas”, esta afirmação é invariavelmente compreendida pelo falante/ouvinte competente da língua como uma afirmação sobre a totalidade das mesas do restaurante em questão e não sobre todas as mesas que existem. Há aqui uma restrição de domínio do discurso determinado pelo contexto do proferimento. Nesse sentido, boa parte da pesquisa desenvolvida pela semântica pragmática e pela chamada teoria dos atos de fala busca oferecer uma abordagem filosófica satisfatória de como os contextos de proferimento determinam o significado de muitos termos linguísticos e, consequentemente, determinam os limites do próprio domínio do discurso.

De forma análoga ao que ocorre nas linguagens naturais, muitas das afirmações realizadas na prática científica e matemática e que podem ser formuladas enquanto afirmações sobre totalidades, possuem também seus próprios mecanismos de restrições da totalidade quantificada. Por exemplo, as afirmações de que “Todo metal dilata quando aquecido” e que “todo número natural maior ou igual a 2 que é divisível apenas por 1 e por si mesmo é dito um número primo” possuem ambas o que chamamos de restrições *sortais*, pois são afirmações sobre a totalidade de um *tipo* ou classe específica de entidades, respectivamente, metais e números. As quantificações restritas cumprem um papel fundamental nas ciências empíricas, pois, invariavelmente, uma lei científica é caracterizada por expressar generalizações sobre a ocorrência de classes de fenômenos específicos, tais como a mudança de estado físico de substâncias a partir da variação de temperatura, a atração que grandes corpos celestes exercem sobre a matéria ao seu redor, dentre outras. Por outro lado, generalizações na matemática são quase sempre restritas a classes de entidades matemáticas específicas, tais como conjuntos, séries numéricas, estruturas algébricas, figuras geométricas, dentre outras.[14]

No que diz respeito à lógica, o perfil da semântica padrão dos quantificadores desenvolvida ao longo do século xx – e que apresentei em seus traços mais gerais no primeiro capítulo – pareceu apontar frequentemente na direção de quantificações restritas; embora, como Charles Parsons (2006; p. 204) chama atenção, essas restrições ocorram apenas no nível da metalinguagem, ou seja, no nível das interpretações, e não estejam explicitamente expressas nas próprias sentenças. Desse modo, o tratamento técnico dado às quantificações sempre as associam a um *domínio* que, no contexto da abordagem conjuntística da teoria dos modelos é, em geral, entendido enquanto um conjunto constituído pelos itens – que podem ser de diferentes tipos: objetos ou propriedades de diferentes ordens – com os quais o universo do discurso está comprometido. Nesse sentido, a própria distinção entre a lógica de predicados de primeira ordem e lógicas de predicados de ordem superior se faz por intermédio de restrições de domínio de quantificação. No caso da lógica de predicados de primeira ordem o quantificador percorre exclusivamente um domínio de objetos, ao passo que, se as quantificações forem realizadas sobre domínios que também comportem propriedades de objetos, estaremos fazendo quantificações de segunda ordem. Nesse contexto, é fácil perceber que podemos realizar quantificações de diferentes ordens variando o domínio de quantificação e que, em tese, a interpretação do *modus operandi* do quantificador o liga a um domínio específico e restrito.

O panorama apresentado acima revela que a ocorrência e a abrangência das quantificações restritas são inúmeras. No entanto, uma observação mais atenta da prática filosófica e da semântica das linguagens formais, pode revelar outro

[14] Como Michael Potter chama atenção, a importância e a frequência das restrições de quantificadores em afirmações matemáticas marca a estrutura da própria linguagem usada pelos matemáticos. “Very often the variables that occur in mathematical texts are intended to range over only a restricted class of objects, and in order to aid readability mathematicians commonly press into service all sorts of letters to mark this restrictions: ***m***, ***n***, ***k*** for natural numbers, ***z***, ***w*** for complex numbers, ***a***, ***b***, for cardinal numbers, ***G***, ***H*** for groups, etc.” (Potter, 2004: p. 11)

aspecto de nossas afirmações sobre totalidades. A filosofia e algumas porções específicas da lógica e da matemática levantam a presunção de realizar também afirmações acerca de *totalidades irrestritas*, ou seja, afirmações sobre aquilo que chamamos de uma *generalidade absoluta*. Em tese, tal discurso diz respeito a absolutamente tudo o que há. Não haveria para tais afirmações gerais nenhuma restrição explícita nem implícita do domínio do discurso. Vejamos como isso ocorre em diferentes campos do conhecimento humano.

Na filosofia contemporânea é comum a descrição da metafísica nos termos propostos por Bradley enquanto um campo de pesquisa marcado pelo "esforço em compreender o universo, não simplesmente de maneira fragmentada ou por partes, mas de algum modo como um todo".[15] Essa ideia expressa a pretensão dos metafísicos de oferecer uma teoria sobre a totalidade do real, ou ainda, sobre os constituintes últimos de absolutamente tudo o que existe.[16] Nesse sentido, a relação entre quantificação irrestrita, generalidade absoluta e a metafísica é de grande destaque, pois, em última instância, podemos compreender a legitimidade de quantificações sobre um domínio absoluto como a condição de possibilidade de uma teoria da totalidade do real.[17]

A ocorrência de quantificações irrestritas parece presente mesmo em afirmações de autores que assumem uma orientação fortemente crítica com relação à metafísica tomada em seu sentido clássico. Em muitas das afirmações de filósofos que rejeitam as pretensões clássicas de descrição dos constituintes

---

[15] Cf. Bradley, F. H. (1893) *Appearance and Reality*. London: S. Sonnenschein. 2nd ed., 1897.

[16] A correlação entre metafísica e um domínio absoluto é também ressaltado por E. J. Lowe ao defender que a concepção tradicional da metafísica consiste em uma investigação racional, universal e autônoma sobre tudo o que há. Cf. Lowe, E. J. (2002) *A Survey of Metaphysics*. Oxford UK: Oxford University Press, p.3: "(...) this point merely serves to strengthen the claims of metaphysics to be an autonomous and indispensable form of rational enquiry: because the point is that absolutely everything, including even the status and credentials of metaphysics itself, comes within the purview of the universal discipline which metaphysics claims to be." De modo análogo, em *Process and Reality* Whitehead descreve o empreendimento metafísico – a filosofia especulativa – como fundado em um discurso consistente sobre totalidades: "Speculative Philosophy is the endeavour to frame a coherent, logical, necessary system of general ideas in terms of which every element of our experience can be interpreted. By this notion of "interpretation" I mean that that everything of which we are conscious, as enjoyed, perceived, willed, or thought, shall have the character of a particular instance of the general scheme." in Whitehead, A. N. (1978) *Process and Reality*. New York/London: The Free Press, p.3.

[17] A metafísica enquanto disciplina está comprometida com questões que não dizem respeito diretamente e nem pressupõe uma totalidade absoluta. Como exemplo dessas questões, temos o problema do livre-arbítrio; o problema mente corpo; a existência de Deus; dentre outros. Essas questões compõem aquilo que comumente é denominado de *metafísica especial* em oposição a metafísica geral e sua pretensão de construir uma teoria sobre a totalidade absoluta da realidade. Obviamente, a metafísica que pressupõe e é afetada diretamente pelo tópico da quantificação irrestrita é a metafísica geral.

últimos da realidade apelando para entidades não materiais, está ainda assim presente a pretensão de uma ontologia naturalizada ou empirista enquanto uma teoria sobre absolutamente tudo o que existe. Esse é claramente o exemplo de Quine. Em *On what there is*, ao responder com o termo "tudo" à pergunta "O que há?", Quine pensava estar respondendo à pergunta ontológica fundamental. No entanto, aparentemente, a pretensão quineana era a de usar o quantificador "tudo" irrestritamente. O contexto associado ao quantificador na resposta de Quine não deve excluir nenhum item como irrelevante ao discurso. Do contrário, haveria algo que escapasse ao domínio do que há, ou seja, haveria algo que não existe. Obviamente, isso seria um contra-senso para Quine.

Para seguir com exemplos sobre ontologias naturalistas, Williamson (2003) chama atenção para o fato de que o *slogan* principal do naturalismo "Tudo é parte do mundo natural" – ou ainda, de maneira resumida: "Tudo é natural" – seria incorretamente compreendido caso o entendêssemos como deixando de lado algum objeto não natural e contextualmente irrelevante para o naturalismo. Um correto entendimento da afirmação do naturalista não pode ser restrito a nenhum domínio contextualmente relevante. Ela deve ser entendida como uma generalização sem nenhuma restrição. O que o lema afirma em última instância é que absolutamente tudo é natural, ou seja, que o domínio do que é natural determina ou comporta uma generalidade absoluta. Portanto, ao afirmar "Tudo é natural", o naturalista pretende realizar uma quantificação irrestrita.

Essa relação entre quantificações irrestritas e metafísica é constantemente explorada na literatura sobre ontologias formais. Nesse contexto, Charles Parsons sustenta que a análise da possibilidade de quantificações irrestritas pode oferecer um recurso útil a partir do qual seria possível obter respostas para muitas disputas metafísicas, a exemplo do debate realismo/anti-realismo:

> Metaphysicians differ about what there is. That is neither news nor especially interesting. What seems to me a potential problem is that if our quantifiers can really capture everything in some absolute sense, then some form of what Hilary Putnam calls "metaphysical realism" seems to follow. As I understand it that is that there is some final answer to the question what objects there are and how they are individuated. (Parsons, 2006: p. 205)

Ainda no âmbito da metafísica, David Lewis (1973) defendeu a tese de que a semântica modal que ele propunha só poderia ser satisfatoriamente desenvolvida com base em quantificações irrestritas. Lewis (1986) interpretou operadores modais – tais como o de necessidade e possibilidade – como percorrendo um domínio de mundos possíveis ontologicamente existentes à maneira do nosso, ou seja, todos os mundos possíveis são portadores de características espaço-temporais, dotado de seus respectivos habitantes e de objetos em relações. No contexto do realismo modal extremo de Lewis, o domínio do que há excede o domínio do que existe em nosso mundo possível. Não por acaso, a teoria de Lewis é por vezes acusada – embora não de forma justa – de cair em algum tipo de meinongianismo devido sua superinflação ontológica e a possível aplicação da distinção meinongiana entre termos tais como *há* e *existe* aos mundos possíveis lewisianos. Além disso, dado que, pensados conjuntamente, a totalidade dos mundos possíveis compreende tudo aquilo que possivelmente existe, tal domínio seria absoluto. Em uma passagem de *Counterfactuals*, Lewis parece oferecer razões para que a própria disputa entre o atualismo e seu realismo modal extremo possa ser interpretada com base na distinção entre quantificações restritas e irrestritas:

> Our idioms of existential may be used to range over everything without exception, or they may be tacitly restricted in various ways. In particular, they may be restricted to our own world and things in it. Taking them as thus restricted, we can truly say that there exist nothing but our own world and its inhabitants […]. It would be convenient if there were one idiom of quantification, say “there are …”, that was firmly reserved for unrestricted use and another, say “there actually exist …” that was firmly reserved for the restricted use. (Lewis, 1973: p. 86-7)

A ontologia de Lewis é superabundante e compreende toda entidade que pertença a pelo menos um mundo possível. Tendo em vista que o agregado de tudo o que há em pelo menos um mundo possível compreende uma generalidade absoluta, a consistência da semântica modal de Lewis estaria subordinada à legitimidade de quantificações irrestritas.

Do mesmo modo, a formulação e interpretação de princípios lógicos clássicos, a exemplo do princípio de auto-identidade:

$\forall x\ (x{=}x)$

ou seja, *tudo* é idêntico a si mesmo, parece apontar fortemente para o comprometimento com uma generalidade absoluta expressa por uma quantificação que, por sua vez, está associada a um domínio irrestrito. Em tal afirmação, o termo “tudo” parece remeter a uma generalidade sem qualquer tipo de restrição. Não importa o que tenhamos em questão como valor da variável da sentença quantificada acima – particulares, sejam eles concretos ou abstratos; propriedades; relações; funções; estados mentais; ficções –, absolutamente tudo é idêntico a si mesmo. Portanto, o domínio que satisfaz o princípio de auto-identidade é o domínio mais abrangente possível, ou ainda, uma generalidade absoluta. O mesmo pretenso caráter de uma quantificação irrestrita pode ser percebido na formulação de importantes propriedades lógicas de relações tal como a simetria da identidade – $\forall x \forall y\ (x=y \rightarrow y=x)$ – e em negações existenciais em metafísica, a exemplo da rejeição nominalista a universais; $\forall x \neg$(x é um universal), ou seja, nada é um universal. Nas duas quantificações em questão, não parece haver restrições quanto aos objetos que podem figurar como valores das variáveis quantificadas. Novamente, quantificações de tais tipos constituem afirmações absolutamente gerais sobre relações ou propriedades: sejam elas satisfeitas por absolutamente tudo ou, alternativamente, não satisfeitas. Não obstante, em última instância, o alcance do discurso é sempre uma generalidade absoluta.

Outros exemplos podem ser apresentados ainda no campo da lógica, tais como o princípio de não-contradição:

$\forall x \neg(\mathrm{P}x \wedge \neg \mathrm{P}x)$

bem como na descrição do comportamento lógico do próprio quantificador universal, como em:

$\forall x(\forall y \mathrm{P}y \rightarrow \mathrm{P}x)$

Na primeira sentença temos que, dada qualquer propriedade, para absolutamente todo objeto vale que ele satisfaz ou não a propriedade em questão. Já a segunda sentença afirma nada mais que, se uma propriedade é satisfeita por absolutamente tudo, então dado qualquer objeto, esse objeto satisfará a propriedade em questão. A mesma pretensão de universalidade irrestrita foi levantada por Quine em sua reconstrução da teoria dos conjuntos conhecida como *New Foundations* onde ele afirma: “The variables are to be regarded as taking as values any objects whatever; and among these objects we are to reckon classes of any objects, hence also classes of any classes" (Quine, 1953: p. 81).[18]

No que diz respeito ao discurso matemático, as quantificações irrestritas parecem estar comumente associadas ao caráter universal da aplicabilidade da aritmética inúmeras vezes ressaltado pelos matemáticos e filósofos da matemática. Como um exemplo destacável dessa posição, no *Grundlagen* §14, Frege expressa claramente a ideia de que o domínio do que é contável, ou seja, o domínio das verdades aritméticas é "o mais abrangente de todos; pois pertence a ele não somente o que é atual, não somente o que é intuível, mas tudo o que é pensável". Nesse sentido, o domínio de aplicação da aritmética compreenderia uma totalidade irrestrita. Não obstante, é importante ressaltar que, apesar de Frege apontar na direção de uma aplicabilidade universal e absoluta da aritmética, sua posição não está sustentada em uma concepção de lógica e de quantificação em termos da semântica padrão dos quantificadores descrita no capítulo anterior onde quantificações são *relativas* a modelos. Como Shapiro (1991: p. 11) chama atenção, a concepção logicista fregeana da aritmética não pode ser honestamente entendida de um ponto de vista modelo teorético, pois, da forma como foi concebido, o sistema fregeano era completamente interpretado. Em Frege, não há espaço para uma terminologia não lógica cujos referentes pudessem variar de modelo em modelo. O logicismo de Frege é um bloco robusto firmado em um conjunto de pressupostos filosóficos onde a quantificação irrestrita está associada, em grande parte, ao comportamento das propriedades dentro da hierarquia de níveis implícita[19] em sua obra e não à noção de domínio de quantificação na acepção da semântica de modelos posteriormente desenvolvida pelos lógicos do século xx.

Ainda a respeito das quantificações na matemática, até mesmo Russell, que através do seu paradoxo e inúmeros textos tornou-se um ícone do exército de

---

[18] Essa tese é também defendida em: Quine, W. v. O. (1951) *Mathematical Logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, p. 69. Tanto os *New Foundations* quanto o *Mathematical logic*, ambos de Quine, são entendidos como reconstruções da teoria dos conjuntos incompatíveis com o sistema ZFC.

[19] Uso aqui a expressão "implícita", pois certamente Frege não desenvolveu uma teoria de tipos tal como Russell o fez em detalhes posteriormente. No entanto, há no sistema fregeano toda a base teórica a partir de onde pode ser pensada uma hierarquia de conceitos. O fato de Frege estar primordialmente preocupado com a fundamentação da aritmética e não com as consequências últimas de sua concepção de lógica contribuiu para o não detalhado desenvolvimento dessa hierarquia de conceitos.

teóricos contrários a quantificações irrestritas, inicialmente chegou a afirmar nos *Principles of Mathematics* que:

> […] in every proposition of pure mathematics, when fully stated, the variables have an absolutely unrestricted field: any conceivable entity may be substituted for any one of our variables without impairing the truth of our proposition. (Russell, 1903; p. 7)

É de amplo conhecimento que Russell mudou de opinião várias vezes ao longo de sua carreira filosófica. Por essa e outras razões, a passagem acima não pode ser usada com credibilidade para criar uma polêmica em confronto com o uso padrão do paradoxo de Russell no debate sobre a quantificação irrestrita. Contudo, as palavras nela contida é certamente emblemática em expressar o poder de sedução que a universalidade da matemática exerce mesmo em oponentes do discurso sobre a generalidade absoluta.

Tudo o que foi dito até então reforça a importância filosófica do debate acerca da legitimidade de quantificações irrestritas. Há aqui um aspecto fortemente metafilosófico do problema. Uma resposta ao problema da quantificação irrestrita implica inevitavelmente em respostas para inúmeros outros problemas em áreas como a metafísica, a filosofia da lógica, filosofia da matemática, dentre outros. Em última instância, a possibilidade de quantificar sobre um domínio absoluto está diretamente associada às próprias condições de possibilidade de diferentes áreas da pesquisa filosófica. Portanto, parece razoável pensar que diferentes respostas ao objeto de investigação desta tese implicam em diferentes e incompatíveis concepções sobre o que constitui o campo de pesquisa da filosofia e quais seus limites.

2.2. O que há de errado em falar sobre absolutamente tudo?

Em princípio, não há nada de errado com o fato de que possamos formular tanto quantificações restritas quanto irrestritas, seja na formulação de nossas teorias de mundo a partir das ciências naturais e filosofia, seja nas nossas linguagens formais – a exemplo da lógica e da matemática – , bem como na nossa prática linguística cotidiana. O panorama apresentado acima parece indicar que essa é uma situação frequente e seria desonesto negar que nosso discurso é, pelo menos *aparentemente*, perpassado por afirmações sobre totalidades restritas e irrestritas. No entanto, é também verdade que muitas de nossas intuições acerca dos fundamentos de práticas linguísticas se mostraram, ao longo do desenvolvimento técnico da filosofia da linguagem, não sustentáveis de um ponto de vista lógico. Em verdade, embora a legitimidade de quantificações restritas pareça ser uma prática linguística inquestionável, restando estabelecer para elas uma semântica bem definida que torne claros os diversos mecanismos de restrições do domínio de quantificação, o quadro de legitimidade que sustenta quantificações irrestritas parece constantemente questionado nos círculos lógicos e filosóficos.

À primeira vista, há dois modos básicos pelos quais quantificações irrestritas podem ser sumariamente rejeitadas:

(i) caso toda quantificação irrestrita envolva algum tipo de contradição e, portanto, resulte sempre em uma falsidade;

ou ainda, por uma via mais extrema,

(ii) caso quantificações irrestritas sejam simplesmente sem significado, ou seja, caso não haja nenhum modelo que as satisfaça.

No entanto, uma observação mais atenta pode facilmente revelar que a estratégia (i) falha diante de argumentos básicos da lógica clássica. Se é verdade que toda sentença S quantificada de maneira irrestrita é falsa, pois implica alguma contradição, então sua negação, $\neg S$, deveria ser verdadeira. Contudo, dado que a negação de uma quantificação irrestrita é também uma quantificação irrestrita, novamente teríamos quantificações irrestritas verdadeiras; o que contraria a afirmação inicial de (i) de que toda quantificação irrestrita é falsa. Com isso, parece razoável pensar que a estratégia (ii) indica a melhor via de argumentação contra o tipo de quantificação em questão. O oponente de tais quantificações teria de mostrar, seguindo uma abordagem semântica da questão, que não há nenhum modelo que possa figurar como domínio de uma quantificação irrestrita e que, portanto, toda quantificação supostamente irrestrita ou é sem significado ou possui, em última instância, algum tipo de restrição implícita. Muitos lógicos e filósofos buscaram obter resultados que mostrassem a ilegitimidade formal do discurso sobre generalidades absolutas através de mecanismos lógicos – especialmente derivados da teoria dos modelos e teoria dos conjuntos – ou por intermédio de intuições filosóficas anti-metafísicas acerca dos limites de uma teoria sobre a estrutura da realidade enquanto um todo.

2.2.1. Relatividade ontológica, indeterminação semântica e quantificação irrestrita

Seguindo alguns *insights* associados à sua concepção dos fundamentos da lógica e da linguagem, bem como à sua crítica à metafísica, Carnap (1950) acenou fortemente contra a legitimidade de quantificações irrestritas; e o fez de maneira especial através de sua distinção entre dois diferentes tipos de questões de existência, a saber, *questões internas* e *externas*. Em seu apêndice ao *Meaning and Necessity* intitulado “Empiricism, Semantic and Ontology”, Carnap definiu uma questão de existência como *interna* caso ela seja formulada dentro de um sistema de referência (*framework*). Ao passo que, se a questão for formulada de uma maneira tal que envolva e suspenda a legitimidade da totalidade do próprio sistema de referência a partir do qual ela é formulada, ela é dita uma questão *externa*. Dessa forma, para Carnap, uma questão como “existem números primos entre 100 e 110?” é uma questão de existência interna formulada a partir do sistema de referência da aritmética e, portanto, admite uma resposta simples por meio de procedimentos matemáticos de verificação. Por outro lado, uma questão tal como “números existem?” pode tanto ser uma questão interna quanto externa. Caso o que se tenha em mente com a questão é saber se dentro do sistema de referência, ou ainda, do domínio de objetos pressupostos pela matemática, há algum objeto que satisfaça a propriedade de ser um número, então estamos diante de uma questão interna de fácil decisão; a resposta seria um trivial “sim”. Não obstante, caso o que esteja em questão seja o estatuto ontológico de coisas como números, ou seja, se eles de fato existem independentemente do nosso discurso matemático, então estamos diante de uma questão externa de existência para a qual não possuímos nenhum mecanismo satisfatório para obter uma resposta. Com isso, Carnap claramente defendeu a ilegitimidade de questões externas de existência relegando-as à categoria de pseudo-questões. De acordo com Carnap, questões metafísicas são exemplos paradigmáticos de questões externas de existência e, portanto, sem solução possível, pois pretendem uma resposta que independa do sistema de referência a partir do qual seus termos mais básicos foram definidos; o que para Carnap é completamente inviável.

De acordo com essa intuição de Carnap, afirmar que toda questão formulada de maneira legítima pressupõe um sistema de referência específico, implica de forma análoga que, toda sentença quantificada dentro de uma teoria deve possuir como domínio o âmbito restrito do sistema de referência assumido pela teoria em questão. Desse modo, uma quantificação irrestrita pressuporia um sistema absoluto de referência ao qual compreendesse uma ontologia de tudo – incluindo o próprio sistema absoluto de referência – e, juntamente com ele, uma resposta final para quais tipos de objetos, propriedades e relações existem enquanto parte desse sistema absoluto de referência. Para Carnap, essa é uma tarefa estruturalmente impossível de ser satisfeita. Não há uma linguagem privilegiada onde ocorram quantificações livres de limitados sistemas de referência.

Similarmente ao que foi defendido por Carnap, também encontramos na obra de Hilary Putnam argumentos contra a existência de um domínio todo inclusivo, bem como uma defesa de que as afirmações dentro de nossas teorias são sempre relativas a um esquema conceitual ou condicionadas aos limites impostos por linguagens específicas a partir das quais nossas teorias são formuladas. Esses esquemas conceituais de Putnam equivalem, em linhas gerais, aos sistemas de referência carnapianos. Embora Putnam tenha mudado algumas vezes de posição sobre muitas questões relevantes em filosofia ao longo de sua carreira, em *The many faces of realism* ele sustenta claramente uma posição relativista à maneira de Carnap. Para usar um exemplo do próprio Putnam (1987: pp. 18-19) ao discutir a posição de Carnap, suponhamos que vivemos em um mundo *W* com apenas três objetos particulares x_1, x_2 e x_3. Poderíamos confrontar nossa descrição de *W* com a de um lógico polonês (*Polish logician*) hipotético que, baseado em uma ontologia mereológica, afirma que há em *W* além dos três objetos assumidos incialmente, mais quatro objetos compostos pelas seguintes somas mereológicas: x_1+x_2; x_1+x_3; x_2+x_3; x_1+x_2+x_3. De acordo com Putnam, não há nenhum critério fundamental e significativo para estabelecer qual das duas descrições de *W* está correta. Isso ocorre porque, em última instância, ambas as posições estão corretas relativas a um determinado esquema conceitual. Dado que não há nenhum esquema conceitual independente e mais fundamental a partir do qual todos os outros possam ser avaliados, uma resposta à pergunta sobre quantos objetos existem em *W*, se analisada com a pretensão de independência de esquemas conceituais particulares, é destituída de sentido.

Contra o relativismo de esquemas conceituais de Putnam, Lewis (1984b) defendeu a possibilidade de dar uma resposta a perguntas do tipo mencionado acima para além das limitações impostas por esquemas conceituais particulares ao propor que certas coleções de indivíduos são mais fundamentais ou mais “naturais” que outras. Com isso, os valores semânticos de uma determinada interpretação I possuiriam algum tipo de primazia com relação aos valores de outra interpretação I* caso I fosse mais “natural” que I*. Nesse caso, I estaria em melhores condições de determinar o que existe com relação à I*. No entanto, Lewis não oferece nenhum argumento realmente convincente para mostrar, entre duas linguagens, como podemos decidir qual delas é a mais “natural”. Um desafio semelhante a respeito de critérios de decisão sobre diferentes sistemas de referência que descrevem o mesmo conjunto de fatos é enfrentado por Goodman (1983) ao tratar do chamado novo enigma da indução em seu paradoxo das esmeraldas. Contudo, não pretendo desenvolver essas críticas no presente trabalho para não me distanciar em demasia do problema da quantificação irrestrita.

Desse modo, se Putnam estiver correto e não houver como obter uma resposta independente de esquemas conceituais para a questão “O que há?”, é sem sentido afirmar a existência de um domínio todo inclusivo ou uma generalidade absoluta independente de esquemas conceituais. Se o argumento de Putnam está correto, não há como uma sentença quantificada de uma teoria qualquer percorrer um domínio absolutamente irrestrito.

2.2.2 O paradoxo de Skolem e a quantificação irrestrita.

Há ainda outro interessante argumento apresentado por Putnam e endereçado contra a existência de um domínio fundamental e absoluto do discurso que vale a pena ser discutido aqui. Em seu famoso texto *Models and reality*, Putnam (1980) defende que o paradoxo de Skolem pode ser usado para sustentar a tese de que não há um discurso sobre um domínio absoluto. Isso interessa diretamente ao problema da quantificação irrestrita, pois o mesmo *insight* pode ser usado, *mutatis mutandis*, para defender a tese de que toda quantificação expressa na lógica de predicados deve ser restrita. Para uma melhor compreensão do argumento de Putnam é necessário em primeiro lugar uma breve e ligeiramente informal apresentação do teorema de Löwenheim-Skolem.

O que o famoso resultado de Löwenheim-Skolem afirma é basicamente que dado qualquer conjunto Γ de sentenças da lógica de predicados de primeira ordem que é satisfatível em um modelo com cardinalidade infinita, Γ possui um modelo que tem a mesma cardinalidade dos números naturais. Esse resultado também pode ser apresentado em outros termos (McGee, 2006: p. 186): o teorema estabelece que, se há um pretenso modelo na linguagem de primeira ordem para um conjunto Γ de sentenças, então há um contável submodelo no qual as mesmas sentenças de Γ são igualmente verdadeiras. Desse resultado segue-se que um conjunto de sentenças da linguagem de predicados que possua um modelo cuja cardinalidade é infinita possui, em verdade, mais de um modelo.

De modo geral, o resultado de Löwenheim-Skolem foi – e ainda é – compreendido por muitos como associado a um paradoxo na medida em que ele apresenta uma surpreendente característica de sistemas formais incompatível com outros resultados já consolidados na lógica clássica. Não obstante, rigorosamente falando, seu aspecto paradoxal é meramente aparente, uma vez que ele não aponta diretamente para uma antinomia, ou seja, uma evidente contradição. Como destaca Bays (2014), o chamado paradoxo de Skolem traz à tona uma incômoda desarmonia entre pelo menos dois importantes resultados amplamente assumidos: o próprio teorema de Löwenheim-Skolem e a prova de Cantor para a não enumerabilidade de determinados conjuntos. Vejamos como essa desarmonia se dá. Por um lado, o teorema de Löwenheim-Skolem afirma que, se a linguagem de primeira ordem tem modelos de cardinalidade infinita, então ela tem modelos cujo os domínios são todos eles contáveis. Por outro lado, o resultado de Cantor sobre a não enumerabilidade de determinados conjuntos infinitos – a exemplo do conjunto dos irracionais e, consequentemente, o conjunto dos reais – prova que alguns conjuntos são não contáveis. O aspecto desconcertante dos dois resultados tomados conjuntamente é que o resultado de Cantor sobre a não enumerabilidade de determinados conjuntos pode ser formulado em linguagem de primeira ordem que, por sua vez, admite modelos contáveis. Desse modo, temos um resultado que afirma a existência de conjuntos incontáveis formulado em uma linguagem apenas de domínios contáveis. Além disso, os resultados de Cantor e de Löwenheim-

Skolem são suportados pelos mesmos axiomas da lógica clássica. Tudo isso parece comportar uma aparente e desconcertante incompatibilidade. De agora em diante, quando eu usar a expressão “Paradoxo de Skolem” é a essa aparente incompatibilidade que estarei me referindo.

Para ilustrar o Paradoxo de Skolem, podemos tomar emprestado o exemplo de Bays (2014) dado sua relevância para os objetivos do presente trabalho. Bays destaca o seguinte caso: seja S uma axiomatização em lógica de predicados de primeira ordem da teoria dos conjuntos ZFC. Assumindo a consistência de ZFC, podemos afirmar que S possui um modelo M e, como garante o teorema de Löwenheim-Skolem, M deve ser contável. No entanto, as descobertas de Cantor sobre a enumerabilidade de conjuntos prova que $S \vdash \exists x$ (x é não contável), onde x é um conjunto. Portanto, deve haver algum $m^* \in M$, tal que $M \models$ “m* é não contável”. No entanto, como M é um modelo contável, deve haver apenas contáveis $m \in M$, tal que $M \models m \in m^*$. Apesar do resultado de Cantor, do ponto de vista da última afirmação, m* parece ser um conjunto contável; o que contradiz a hipótese inicial de que m* é não contável. Desse modo, a lógica de predicados de primeira ordem parece não ser capaz de expressar o fato de ZFC conter conjuntos não enumeráveis, ou ainda, não contáveis.

Para compreender a força e a abrangência desse argumento, é importante observar que o fato de escolher ZFC como o sistema em questão juntamente com uma axiomatização S é completamente arbitrária. O que o paradoxo de Löwenheim-Skolem parece induzir é que o mesmo resultado obtido no exemplo de Bays poderia ser obtido em qualquer sistema axiomático para a teoria dos conjuntos que fosse formalizada com base na nossa clássica lógica de predicados de primeira ordem.

Há uma vasta discussão sobe as implicações filosóficas em torno do Paradoxo de Skolem que não pode ser esgotada nos limites do presente trabalho, mas alguns pontos merecem destaque. Skolem (1922) parecia entender o resultado de seu teorema, bem como as implicações deste, como uma forte razão para pensar as noções da teoria dos conjuntos como dotadas de uma semântica envolvendo algum grau de *relativismo* sobre domínios e modelos. Sobre esse relativismo, Shapiro afirma de maneira esclarecedora:

> There is uncertainty as to what he [Skolem] meant, but the idea seems to be that there is no absolute, independent (or objective) notion of, say, natural number and cardinality. In other words, Skolem held that no set is infinite or the size of the natural numbers *simpliciter*, but only infinite or the size of the natural numbers relative to domain or model. (Shapiro, 2000: p. 41)

A mesma linha de raciocínio é seguida por Putnam. A respeito do aspecto paradoxal do resultado de Löwenheim-Skolem, Putnam (1980: p. 421) defende que, embora de um ponto de vista lógico o resultado obtido não seja efetivamente um paradoxo, de um ponto de vista da filosofia da linguagem ele está próximo disso. Para Putnam, o teorema de Löwenheim-Skolem traz consigo importantes implicações para o debate sobre o realismo em filosofia e, consequentemente, para a pergunta de caráter ontológico levantada anteriormente: "O que há?".[20] É basicamente essa forma de entender o problema a partir de seus aspectos semânticos e ontológicos que pretendo explorar aqui. De acordo com Putnam, essa relatividade afirmada por Skolem conta como um argumento em favor de um anti-realismo ontológico na medida em que uma teoria matemática não possui uma interpretação fixa e pré-estabelecida por uma realidade matemática ontologicamente independente. A interpretação da teoria deriva de decisões semânticas tomadas pelo matemático. O resultado de Skolem mostra que isso é o caso pelo menos para a aritmética e a análise quando formulada com base na lógica de predicados.

Quando aplicado ao debate sobre a quantificação irrestrita, o que foi afirmado acima produz interessantes consequências. A ideia básica por trás do *insight* de Putnam poderia ser reconstruída em um argumento que segue o seguinte percurso: partimos da suposição de que nossas práticas linguísticas determinam um modelo cujo domínio seja absoluto. Em seguida, confrontamos essa suposição com o teorema de Löwenheim-Skolem, de acordo com o qual vale a seguinte afirmação: sendo *s* um conjunto enumerável figurando como o domínio de cardinalidade infinita que compõe um determinado modelo de uma linguagem

[20] Em *Models and Reality*, Putnam (1980: pp. 421-2) distingue três formas básicas de responder ao problema do realismo dependendo da postura que assumimos com respeito a noções como as de *verdade* e *referência*: (i) o *platonismo extremo* que assume o papel de poderes não naturais na tarefa de compreender ou acessar diretamente formas transcendentes; (ii) o *verificacionismo* que entende o problema clássico da verdade com uma questão de verificação e prova e, por fim, (iii) o *realismo moderado* que mantém as noções clássicas de verdade, mas não assume nenhum poder de acesso a algo não natural ou transcendental. Ainda de acordo com Putnam, é basicamente contra essa terceira posição que as implicações do teorema de Löwenheim-Skolem se levantam.

enumerável, deve haver um contável subconjunto *s** tal que *s** figura como um "subdomínio" desse domínio *s* e que fundamenta igualmente nossas práticas linguísticas. Desse modo, caso haja de fato algo como um domínio absoluto que fundamentaria uma quantificação irrestrita, a afirmação de Löwenheim-Skolem deve, em princípio, ser satisfeita para tal domínio e, portanto, deve haver um domínio mais restrito que cumpriria a mesma função do domínio absoluto incialmente postulado. Desse modo, até onde podemos perceber, se essa reconstrução do argumento de Putnam estiver correta, o teorema de Löwenheim-Skolem conta como mais um forte indício de que as pretensas quantificações irrestritas podem ser completamente desqualificadas na lógica de predicados de primeira ordem.

Da forma como penso, esse argumento parece apontar na mesma direção que outros argumentos lógicos que apresentarei a seguir. O que há em comum a todos eles é a ideia de que há limitações estruturais internas à própria lógica clássica e à semântica padrão associada a essa lógica que depõem contra a formulação de quantificações irrestritas no seio de nossas teorias formais. Se meus objetivos forem cumpridos com sucesso, essa impossível convivência entre a lógica clássica e as quantificações irrestrita ficará ainda mais evidente até o fim deste capítulo.

***

Tendo feito essa revisão dos argumentos de Carnap e Putnam que levantam respeitáveis desafios à quantificação irrestrita e à generalidade absoluta, algumas objeções podem ser levantadas para manter o debate aquecido.[21] Por exemplo, no que diz respeito à discordância sobre quantos objetos uma determinada ontologia afirma existir, tal como é posto na disputa envolvendo a ontologia mereológica do hipotético lógico polonês mencionado acima, há sérias suspeitas sobre até onde o argumento apresentado de fato afeta a credibilidade metafísica de uma generalidade absoluta. Com razão, Rayo e Uzquiano (2006: p. 9) chamam atenção para o fato de que a discordância entre quem defende que há três objetos e quem defende que há sete objetos em *W*, como foi exposto no

[21] Uma discussão crítica mais detalhada dos argumentos de Carnap e, especialmente, de Putnam pode ser encontrada em van Inwagen (2002).

exemplo acima, expressa muito mais uma incompatibilidade linguística do que confirma a inexistência metafísica de uma totalidade irrestrita. Para eles, os defensores das duas posições discordam em suas compreensões de conceitos como *existência* e *objeto*. Consequentemente, seus quantificadores percorrem diferentes domínios ao descrever a mesma porção da realidade. Tal situação parece implicar a tese linguística de que nossos quantificadores não são unívocos e envolvem, em algum grau, a indeterminação semântica que é tão cara à posição relativista. No entanto, não necessariamente isso descredencia a tese metafísica da existência de uma totalidade irrestrita.

De minha parte, não estou convencido de que a objeção destacada por Rayo e Uzquiano possa reabilitar a legitimidade de quantificações irrestritas contra as críticas de Carnap e Putnam. Como penso ter deixado claro, o objetivo fundamental do meu trabalho é o de avaliar a legitimidade de quantificações irrestritas. Se tais quantificações são entendidas a partir da semântica padrão dos quantificadores descrita no primeiro capítulo, elas devem pressupor o acesso e o controle linguístico e técnico de uma generalidade absoluta entendida enquanto um conjunto de tudo o que há. Nesse contexto, alguém pode alegar que mesmo que a tese metafísica que sustenta a existência da totalidade irrestrita ou generalidade absoluta esteja correta, ainda assim nossas quantificações, enquanto construções linguísticas, estariam sujeitas às indeterminações semânticas e aos limites dos múltiplos esquemas conceituais descritos por Carnap e Putnam. Nesse sentido, o argumento de Rayo e Uzquiano parece ser muito mais uma defesa da existência metafísica da generalidade absoluta: tal existência independe de nossa capacidade de quantificar sobre ela do mesmo jeito que a existência de uma pedra independe da percepção que tenho dela. No entanto, esse mesmo argumento não parece oferecer por si só nenhuma boa razão para reabilitar a possibilidade técnico-formal de quantificações irrestritas mediante os desafios indicados por Carnap e Putnam.

Ao longo dos próximos capítulos devo apresentar duas estratégias de defesa de quantificações irrestritas que penso ser mais eficientes: (i) assumir a inexistência – ou pelo menos, a falta de acesso linguístico e epistêmico – de um domínio absoluto entendido enquanto o objeto-conjunto de tudo o que há e oferecer argumentos que mostrem – contra a semântica padrão – que quantificações irrestritas dispensam o domínio linguístico e o comprometimento ontológico com um conjunto de tudo o que há. (ii) Apresentar uma teoria alternativa dos conjuntos que opere como fundamento de uma nova semântica de quantificadores e que permita tratar a generalidade absoluta sem cair em armadilhas lógicas tais como o paradoxo de Russell e o teorema de Cantor. Antes de passar ao próximo ponto, vale também ressaltar aqui que os argumentos fundados na tese da relatividade ontológica e da indeterminação semântica não figuram como a principal linha de ataque à quantificação irrestrita. Por hora, devo seguir a linha de raciocínio deste capítulo de mostrar mais alguns dos principais argumentos contra quantificações irrestritas.

2.2.3. Os argumentos lógicos contra quantificações irrestritas

Argumentos como os de Carnap e Putnam são certamente respeitáveis e constituem uma importante linha de ataque ao problema da possibilidade de um discurso sobre absolutamente tudo. Isso fica claro ao perceber a influência decisiva que eles exercem mesmo em trabalhos mais recentes. Por exemplo, a estratégia de Carnap de submeter as quantificações de uma teoria a um sistema de referência específico e eliminar questões externas encontra eco em importantes trabalhos apresentados nos últimos anos, tais coma as ontologias relativistas descritas por Burgess (2004) e Stalnaker (2003). No entanto, em virtude de suas consideráveis e sucessivas pressuposições filosóficas, os argumentos de Carnap e Putnam se veem envoltos em inúmeras disputas havendo, portanto, muito pouco consenso sobre até que ponto eles são efetivos contra a quantificação irrestrita.

Desse modo, grande parte das principais objeções às quantificações irrestritas – e que de certo modo dominam o debate atual sobre o tema –, foram desenvolvidas com um caráter fortemente técnico e dispensam as discussões filosóficas em termos de esquemas conceituais e indeterminação semântica. Tais objeções são, em geral, derivadas no seio da teoria axiomática dos conjuntos e dos paradoxos que lhe deram origem. Elas visam, em última instância, revelar os obstáculos intransponíveis dentro da própria semântica formal com relação à existência de modelos para as quantificações em questão. Nesse sentido, essas objeções de caráter formal estabelecem uma crítica interna, tendo em vista que, na construção dos argumentos contra as quantificações irrestritas, elas não apelam para nenhum aspecto para além daqueles já assumidos pela própria semântica formal.

Como tentei mostrar no primeiro capítulo, a abordagem semântica *standard* da linguagem de predicados opera associando a cada item linguístico significativo um item extralinguístico; por exemplo, letras predicativas com conjuntos e relações e constantes individuais para objetos. No que diz respeito ao modo como lidamos com os quantificadores dentro da semântica padrão, como observei anteriormente, há uma tendência entre os oponentes de quantificações irrestritas a interpretar o domínio de uma quantificação enquanto um conjunto que tem como elementos todos os possíveis valores das variáveis quantificadas. Essa tendência está expressa no que Cartwright (1994: p.7) chamou de *Princípio Tudo-em-Um* (All-in-One Principle) e, *grosso modo*, que pode ser formulado como segue:

> Ao quantificar sobre certos itens assumimos que a totalidade de tais itens compõe um conjunto. Em outras palavras, todo domínio de discurso determina um conjunto composto pelos objetos pressupostos pelo discurso em questão.

Dito claramente, esse modo de lidar com os quantificadores reflete a tese básica de que devemos entender o domínio de uma quantificação como um conjunto que, por sua vez, deve ser entendido como um objeto abstrato. Ocorre que essa interpretação, juntamente com alguns resultados da teoria dos conjuntos, implica uma série de dificuldades lógicas para as quantificações irrestritas. A princípio, uma quantificação pretensamente irrestrita pretende ser uma quantificação sobre um domínio absolutamente abrangente, ou seja, um domínio todo inclusivo. Tal domínio pode ser definido informalmente da seguinte maneira: um domínio absoluto é um objeto maximal tal que todo objeto seja parte componente dele. Como consequência básica do princípio tudo-em-um, esse domínio constitui precisamente o conjunto de tudo o que há, ou seja, o conjunto universo. No entanto, como vimos anteriormente, de acordo com o *Teorema de Cantor* formulado dentro da teoria axiomática dos conjuntos, não há algo como um conjunto universo, ou seja, não há o agregado maximal de tudo o que existe. O que o teorema de Cantor mostra, basicamente, é o princípio de que, no contexto da nossa teoria iterativa de conjuntos – uma teoria que permite gerar conjuntos de conjuntos a partir de operações específicas – todos os conjuntos são indefinidamente extensíveis. O mecanismo em questão no teorema de Cantor é a operação de potência (*Power Set*) de um conjunto, ou seja, a geração de um conjunto $\wp$(S) que tem como elementos todos os subconjuntos de um conjunto S qualquer. Ao conjunto $\wp$(S) chamamos conjunto potência de S. Como vimos no primeiro capítulo, Cantor provou que não há, para qualquer conjunto, uma função bijuntiva entre os elementos do conjunto em questão e os elementos do seu conjunto potência. Falando em termos mais precisos, a cardinalidade do conjunto $\wp$(S) pode ser medida pela fórmula $c=2^n$, onde *n* é a cardinalidade do conjunto S e *c* a cardinalidade de $\wp$(S). Portanto, a cardinalidade de um conjunto originado pela operação de potência cresce exponencialmente com relação à cardinalidade do conjunto que lhe deu origem. Obviamente, temos que c>*n*. Uma consequência direta desse teorema é que, se tentarmos aplicar a operação de potência de um conjunto a algo que pressupomos ser o conjunto universo – e não há nada que, em princípio, impeça tal procedimento –, o conjunto derivado dessa operação deve possuir cardinalidade maior do que a do pretenso conjunto universo. Logo, para qualquer conjunto que tomarmos como o conjunto universo, podemos formular um conjunto de maior cardinalidade do que aquela do conjunto a qual aplicamos a operação, ou seja, damos origem a um conjunto que contenha mais elementos que o conjunto universo; o que claramente é um absurdo. Com isso, se o conjunto universo é definido como o conjunto de tudo aquilo que há e todo conjunto é indefinidamente extensível, então não há como formular um conjunto universo. Consequentemente, não há como realizar uma quantificação que pressuponha um domínio irrestrito.

No presente estágio de minha argumentação, estamos historicamente inseridos no contexto da emergência – e da busca por consolidação – da teoria dos conjuntos a partir dos trabalhos de Cantor. Nesse contexto onde a abordagem matemática de Cantor visa consolidação, é bastante compreensível que haja um extremo interesse pela consistência da teoria. Em uma carta a Dedekind de 1899, Cantor menciona dois tipos básicos de totalidades que, em linhas gerais, correspondem às acima mencionadas totalidades irrestritas e restritas; e onde o primeiro tipo de totalidade é claramente tomada como contraditória. Cantor corrobora de maneira explícita a tese da inconsistência de totalidades irrestritas. Isso pode ser percebido como evidente nas seguintes passagens:

> A plurality (*Vielheit*) can be so constituted that the supposition of a "conjoining" (*Zuzammensein*) of *all* its members leads to contradiction, so that it is impossible to conceive of this plurality as a unity, a complete (*fertig*) object. Such pluralities I call *absolutely infinite* or *inconsistent*… As is readily shown, the "totality (*Inbegriff*) of everything thinkable" is such an [inconsistent] plurality. And there are further examples as well. On the other hand, when the totality (*Gesammtheit*) of the members of a plurality can be conjoined without contradiction, so that it is possible for them to be taken together as "one single thing" then I call this a consistent plurality or "set" (*Menge*).[22]

> If we start from the notion of a definite multiplicity (a system, a totality) of things, it is necessary, as I discovered, to distinguish two kinds of multiplicities (…) For a multiplicity can be such that the assumption that *all* of its elements 'are together' leads to a contradiction, so that it is impossible to conceive of the multiplicity as a unity, as 'one finished thing'. Such multiplicities I call *absolutely infinite* or *inconsistent multiplicities*.
> As we can see, the 'totality of everything thinkable', for example, is such a multiplicity (…)
> If, on the other hand, the totality of the elements of a multiplicity can be thought of without contradiction as 'being together', so that they can be gathered together into '*one* thing', I call it a *consistent multiplicity* or a 'set' (…)
> Two equivalent multiplicities are either both 'sets' or both are inconsistent. (Cantor, 1899: p. 114)[23]

Em grande parte, esse modo de pensar a questão diferenciando totalidades consistentes e inconsistentes – esta última expressando a generalidade absoluta – inspirou o que mais tarde caracterizou a distinção de von Neumann entre *conjuntos* e *classes próprias* e toda a estratégia de limitação de tamanho da qual tratei anteriormente. O pano de fundo que conduz à rejeição de uma totalidade irrestrita enquanto uma entidade legítima mostra corretamente que entender algo como membro de uma totalidade é entendê-lo como uma unidade. Portanto, se uma totalidade inconsistente não pode ser uma unidade, ela não pode, por consequência, ser membro de nada; inclusive de si mesma.

Outra linha de objeção amplamente sustentada contra a legitimidade de quantificações irrestritas faz uso das consequências que o paradoxo de Russell trouxe à teoria dos conjuntos. Em última instância, o paradoxo de Russell é uma

[22] Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer, p. 443. A passagem em questão foi citada e traduzida por Rescher e Grim (2008). Os grifos não são encontrados no texto original, tendo sido introduzidos aqui por motivo de ênfase.
[23] Citado por Priest (2002: p. 122).

prova da inconsistência da teoria ingênua dos conjuntos com base no uso irrestrito do princípio da compreensão. De acordo com essa concepção ingênua, um conjunto é uma totalidade de objetos agrupados por intermédio de uma determinada propriedade e, de modo inverso, toda propriedade determina um conjunto que caracteriza a extensão da propriedade em questão. Nesse sentido, dada uma propriedade φ qualquer, há um conjunto *y* formado por todo objeto que satisfaz φ. O que Russell mostrou através do paradoxo que leva o seu nome é que, nem todo predicado sintaticamente bem formado expressa um conjunto, ou ainda, que nem toda propriedade passível de ser definida enquanto predicado da linguagem possui uma extensão legítima, pois alguns predicados e propriedades são paradoxais. Como vimos anteriormente, o exemplo clássico é o polêmico predicado utilizado por Russell na formulação de seu paradoxo, a saber, o predicado definido dentro da teoria ingênua dos conjuntos como “conjunto que não pertence a si mesmo”. Em consonância com o princípio ingênuo da compreensão, tal predicado deve expressar uma classe ou conjunto que possui como membros apenas os conjuntos que não contém a si mesmo como elemento. O predicado – ou propriedade – “conjunto que não pertence a si mesmo”, embora sintaticamente bem formado, não possui uma extensão e, consequentemente, não expressa nenhum conjunto. Com isso, uma dura crítica sobreveio contra o axioma ingênuo da compreensão, além, é claro, da percepção da necessidade de estabelecer restrições nos procedimentos de geração de conjuntos a partir de outros conjuntos. Como veremos a seguir, tais restrições recaem diretamente sobre a legitimidade do conjunto universo.

Uma forma bem conhecida de eliminar o paradoxo de Russell da teoria dos conjuntos se dá por intermédio da introdução do *axioma da separação*. Em uma teoria dos conjuntos que permita quantificações irrestritas é necessário haver um análogo ao axioma da separação garantindo que temos uma interpretação para todo predicado no domínio de objetos e que, ao mesmo tempo, não conduza a paradoxos tais como o descoberto por Russell. No entanto, como Rayo e Uzquiano (2006: p. 7) chamam atenção, essa não constitui uma das mais atraentes linhas de resposta tendo em vista que o axioma da separação fica fora do que provavelmente são as duas abordagens mais aceitas da noção de conjunto, a saber, a concepção iterativa e a concepção de limitação de tamanho. Além disso, em ambas as abordagens o conjunto universo não constitui um conjunto legítimo.

Tanto o teorema de Cantor quanto o paradoxo de Russell ofereceram uma contribuição fundamental para a concepção de *extensibilidade indefinida* de conjuntos caracterizada no que ficou conhecido como uma teoria iterativa de conjuntos. Como destaquei no primeiro capítulo, em tal teoria é permitida a geração ilimitada de conjuntos por operações definidas dentro da própria teoria de conjuntos; o que inviabiliza a ideia do conjunto universo enquanto um conjunto maximal, absoluto. O próprio Russell (1908: p. 225) ressaltou que essa concepção de conjunto inviabilizaria o discurso sobre totalidades irrestritas ao afirmar: "When I say that a collection has no total, I mean that statements about *all* its members are nonsense".

Para ressaltar mais um argumento, Russell também sustentava a estreita relação entre a impredicatividade e a noção de uma totalidade irrestrita na medida em que a noção de um conjunto que englobe tudo o que há já envolveria a ideia de que essa mesma totalidade irrestrita seria um item da coleção. Para uma melhor compreensão da ideia de Russell se faz importante tecer algumas palavras sobre impredicatividade. Em lógica e filosofia, a impredicatividade é introduzida enquanto uma propriedade de definições e demais expressões linguísticas que, ao apresentarem uma entidade, o fazem pressupondo a totalidade na qual a entidade em questão está inserida. Por exemplo, se apresento Alisson por meio da descrição definida "o aluno mais alto da sala", tal descrição é dita impredicativa na medida em que ela apresenta um indivíduo a partir da totalidade na qual ele está inserido. Do mesmo modo, ao definir o conjunto R de Russell por meio da condição "conjunto que não pertence a si mesmo", temos aqui uma definição impredicativa de R. Poincaré e Russell certamente são citados como os principais teóricos a levantarem a tese de que é o uso de definições impredicativas que conduz nossas teorias a paradoxos.[24]

[24] A crítica à impredicatividade vem costumeiramente acompanhada de algum grau de rejeição ao realismo. Muitas vezes, essa rejeição toma a forma de um construtivismo. Se admitimos que nossas definições *constroem* as entidades definidas, então segue-se que uma definição impredicativa envolveria algum tipo de petição de princípio, na medida em que a construção da entidade pressupõe a existência de uma totalidade onde a entidade construída já deveria estar lá contida. Obviamente, se assumimos uma posição realista na qual a existência de tais entidades independe de nossas definições, o problema da impredicatividade simplesmente se dissolveria. Para uma análise crítica da posição de Russell quanto à impredicatividade vale a pena ler o famoso artigo *Russell's Mathematical Logic* de Gödel publicado da coletânea de Benacerraf e Putnam (1983).

Retomando a questão: como exatamente a impredicatividade e a noção de uma totalidade irrestrita se entrelaçam? Da seguinte maneira. Do mesmo modo que a impredicatividade presente no predicado “conjunto que não pertence a si mesmo” conduz a um paradoxo, o conjunto universo entendido como uma totalidade irrestrita também traz consigo uma impredicatividade igualmente nociva à consistência da teoria dos conjuntos. Se o conjunto universo – chamemos tal conjunto de U – é o conjunto de absolutamente tudo o que há, e sendo U também um item dessa totalidade irrestrita, ele deve conter a si mesmo; caso contrário, ele não seria o conjunto de absolutamente tudo. Com isso, em princípio, parece impossível apresentar U sem que isso seja também a apresentação, mesmo que implícita, de uma totalidade na qual o próprio item apesentado já esteja nela inserido. Tendo em vista que, como foi dito acima, Russell atribuía o surgimento dos paradoxos ao uso de definições impredicativas, parece razoável que sua posição em favor da eliminação de tais definições venha acompanhada de uma clara rejeição à totalidade irrestrita expressa no conjunto universo. Russell defendia amplamente a necessidade de eliminar a impredicatividade de nossos sistemas formais seguindo o princípio que pode ser expresso na forma do seguinte lema: *se, ao admitirmos que uma dada coleção tem um total, ela teria elementos definíveis apenas em termos desse total, então a coleção não tem um total*. Fica fácil perceber que o suposto conjunto universo é barrado pelas limitações impostas pelo lema acima.

O que parece ter escapado à percepção de Poincaré e Russell em seus diagnósticos do surgimento dos paradoxos é que nem toda definição impredicativa envolve uma circularidade viciosa. Um exemplo é a expressão “o aluno mais alto da sala” mencionada anteriormente. Além disso, e de maneira mais surpreendente ainda, nem todo raciocínio paradoxal envolve necessariamente impredicatividade ou qualquer tipo de circularidade viciosa. A esse respeito vale a pena conferir o chamado paradoxo linear de Yablo (1993), assim chamado por ser um resultado paradoxal, mas sem circularidade viciosa. Embora seja esse um tópico de grande interesse, não entrarei aqui em uma discussão a respeito do paradoxo linear e suas consequências para o debate sobre impredicatividade e paradoxos em geral, pois isso representaria uma digressão excessivamente longa em relação ao meu objetivo principal e tornaria esse trabalho menos claro e diretivo.[25] Continuemos, portanto, na trilha percorrida até o presente momento.

Após a demonstração de seu paradoxo, o próprio Russell tentou revisar os pressupostos básicos da teoria dos conjuntos e, nessa tarefa, encontrou o desafio teórico a partir do qual fez emergir sua crítica ao chamado princípio do círculo vicioso e às definições impredicativas. Os resultados técnicos derivados das investidas de Russell para salvar o logicismo e a teoria dos conjuntos do paradoxo que ele mesmo descobriu ajudaram a compor a *teoria dos tipos lógicos*. Esses resultados foram publicados em *Principles of Mathematics* e, posteriormente, em parceria com Whitehead, foram expandidos e melhor explanados nos *Principia Mathematica*.

Contudo, há uma certa discussão sobre até onde Russell foi realmente capaz de eliminar de seu programa as famigeradas definições impredicativas e, consequentemente, a possibilidade de que um resultado paradoxal análogo ao que ele obteve fosse posteriormente descoberto em sua própria obra. Esse receio dos críticos parece textualmente justificado – pelo menos no que diz respeito ao Russell do *Principles* –, na medida em que o próprio Russell (1903, Apêndice B) admite os limites de sua proposta no contexto da obra em questão. Sobre a resistência do paradoxo por ele descoberto, é destacável a sentença de encerramento do *Principles*. Ela parece expressar uma respeitosa devoção de Russell ao resultado paradoxal que ele obteve. Curiosamente, Russell chama atenção ao fato de que seu resultado impõe uma dificuldade fundamental aos nossos propósitos de referência a totalidades.

> [...] it appears that the special contradiction [Russell's paradox] is solved by the doctrine of types, but that there is at least one closely analogous contradiction which is probably not soluble by this doctrine. The totality of all logical objects, or of all proposition, involves, it would seem, a fundamental logical difficulty. What the complete solution of the difficulty may be, I have not succeeded in discovering; but as it affects the very foundations of reasoning, I earnestly commend the study of it to the attention of all students of logic. (Russell, 1903: p. 540, Apêndice B)

[25] Uma apresentação bastante didática sobre a noção de impredicatividade e alguns problemas lógicos e filosóficos que a cercam pode ser encontrada em Feferman (2005).

Essa dificuldade em torno da expressão de totalidades constitui um ponto de destaque para os objetivos do presente trabalho e será retomado inúmeras vezes ao longo de minha argumentação.

McGee (2006: p. 184) afirma que, embora seja maravilhoso o monumental trabalho contido no *Principia Mathematica*, há ainda uma distância entre o que Russell e Whitehead disseram ter feito e o que eles de fato fizeram.[26] O marketing em torno dos *Principia* é que essa obra provê os fundamentos para toda a matemática clássica, incluindo a análise clássica; tudo isso dispensando definições impredicativas e círculos viciosos. No entanto, McGee chama atenção para o fato de que para obter uma fundação para a análise matemática é preciso o princípio de que toda coleção não vazia de números reais que é limitada acima tem um menor limite superior. Além disso, o menor limite superior é definido em termos da totalidade dos limites superiores; o que pressupõe uma totalidade que inclui a si mesma. Portanto, a definição de um limite superior de uma coleção não vazia de números reais é impredicativa. Apesar da importância da questão, não constitui meu objetivo no presente estágio do meu argumento questionar o sucesso trabalho de Russell nos *Principia*, mas meramente aplicar o princípio de caridade ao seu diagnóstico de que impredicatividade é a fonte de inúmeros paradoxos conhecidos e verificar todas as consequências desse diagnóstico para a legitimidade da quantificação irrestrita.

É importante ter em mente aqui que, de um ponto de vista histórico, essa linha de argumentação contra quantificações irrestritas fundada em resultados técnicos estabelecidos dentro da lógica teve voz predominante especialmente na primeira metade do século xx. No entanto, embora não mais dotada da hegemonia que já teve outrora, essa estratégia encontra ainda hoje fortes proponentes. Como um atual exemplo de defensor desta linha destaca-se o filósofo Patrick Grim (1991). Em seu livro *The incomplete universe*, Grim utiliza essa estratégia lógica contra a legitimidade de um discurso sobre totalidades irrestritas via paradoxo do mentiroso – que possui, em última instância, a mesma estrutura impredicativa do paradoxo de Russell – e teorema de Cantor. Grim investiga a possibilidade de um discurso sobre uma totalidade irrestrita e sua relação com o teorema de Cantor em

[26] Para uma apresentação introdutória do programa filosófico executado por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica* cf. Urquhart, Alasdair. "The Theory of Types", in: Griffin, Nicholas (2003) *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, Cambridge: Cambridge University Press. pp. 286-309.

inúmeras teorias alternativas de conjuntos, tais como a *New Foundations* e *Mathematical Logic* de Quine, a de Neumann-Bernays-Gödel, a de Ackermann e a de Kelley-Morse. De acordo com Grim (1991: p.109), em todos os casos a investigação aponta na direção de uma conclusão negativa: “nenhuma das teorias inspecionadas parece oferecer uma possibilidade de saída”.

O exemplo de Grim merece destaque uma vez que sua estratégia de argumentação possui algumas interessantes particularidades em comparação às demais críticas à possibilidade da quantificação irrestrita. Grim estabelece uma correlação entre duas importantes noções: a de *conjunto* e a de *verdade*. A ideia básica é que todo conjunto é formado enquanto um agregado de verdades e, em última instância, o próprio conjunto expressa também uma verdade para além de cada verdade particular que ele comporta. Para Grim, essa correlação entre conjuntos e verdades nos é intuitivamente dada pelo princípio da compreensão. Dada uma condição qualquer, por exemplo, “ser uma vogal”, a ela está associado um conjunto V = {x | x é uma vogal} onde cada instância $x \in$V de satisfação da condição em questão expressa uma verdade, a saber,

“*a* é uma vogal” é uma verdade;
“*e* é uma vogal” é uma verdade;
.
.
.
“*u* é uma vogal” é uma verdade.

Por sua vez, o próprio conjunto V expressa uma verdade, a saber, que essa é a totalidade das vogais. A totalidade de ocorrências verdadeiras de “α é uma vogal” onde α é uma constante individual cujo item referido por α satisfaz a condição de ser uma vogal compõe aquilo que podemos chamar de conjunto de verdades com respeito à V. Portanto, V, enquanto uma totalidade restrita, opera de maneira similar a uma cláusula de fechamento que afirma verdadeiramente que isto é tudo que é uma vogal.

Nesse sentido, Rescher e Grim (2008: p. 422-23) chamam atenção para o fato de que o mesmo resultado obtido por Cantor com relação à extensibilidade indefinida de conjuntos pode ser, em linhas gerais, obtido com relação a outras totalidades tais como a de verdades, de proposições, de fatos e de estados de coisas. Tomemos como exemplo o caso da totalidade de todos os fatos. Rescher e Grim (2008: 422-23) iniciam o argumento supondo que haja o conjunto F’ de todos os fatos. Esse conjunto possui um conjunto potência $\wp$(F') composto por todos os subconjuntos F*s* da totalidade dos fatos. No entanto, cada subconjunto F é ele mesmo um conjunto de fatos e, portanto, a ele está associado também um fato [por exemplo, que F é composto pelos fatos tais e tais]. Dado o teorema de Cantor, não há uma correspondência um-a-um entre F' e os fatos elencados pelo conjunto $\wp$(F'). Dito de maneira mais precisa, haverá mais fatos em $\wp$(F') que em F'; o que é uma contradição, dado que definimos inicialmente F' como o conjunto de todos os fatos.

No que diz respeito ao conceito de verdade, há ainda outros argumentos não diretamente associados ao teorema de Cantor que visam mostrar a impossibilidade de lidar tecnicamente com o domínio de todas as verdades. Do mesmo modo que é perfeitamente aceitável a existência de verdades ainda não conhecidas, sabemos hoje que há verdades que não podem ser demonstradas em nenhuma linguagem enumerável; a exemplo do que mostra os resultados de Gödel com relação à incompletude da aritmética. Além disso, alguns filósofos argumentam no sentido de mostrar que a hierarquia de linguagens estabelecida por Tarski (1933), possui também efeitos restritivos quanto a possibilidade de construir uma afirmação absolutamente geral, pois, caso fosse possível, esta deveria implicar a ideia de que se está simultaneamente afirmando algo tanto sobre a linguagem-objeto quanto sobre os inúmeros níveis metalinguísticos; o que não é legítimo nos quadros estabelecidos por Tarski. Tudo isso parece impor limitações à nossa capacidade de lidar de maneira técnica com o domínio de todas as verdades a partir de um sistema formal.

Dado todo o contexto apresentado acima, parece ser uma consequência básica dos nossos padrões de raciocínio sobre totalidades que qualquer tentativa de construir uma teoria de tudo fundada na ideia de uma generalidade absoluta, ou ainda, uma totalidade irrestrita – seja qual forem os itens mais elementares assumidos por tal teoria: conjuntos, fatos, proposições, estados de coisas, dentre outros –, essa tentativa passa igualmente pelas restrições das totalidades irrestritas estabelecidas inicialmente pelo teorema de Cantor. Se não há algo como o conjunto universo, não há algo como uma generalidade absoluta.

No que diz respeito à teoria dos conjuntos, é importante destacar que a limitação quanto ao discurso sobre totalidades irrestritas não é o único desconforto que ZFC enfrenta. É bastante comum a discussão sobre a independência que importantes princípios assumidos em ZFC possuem com relação à teoria enquanto tal. Exemplos destacáveis disso são o *axioma da escolha* e a *hipótese do continuum*. Curiosamente, nem a afirmação nem a negação desses princípios podem ser provados a partir da axiomatização de ZFC. De certo modo, esses princípios possuem, pelo menos de maneira indireta, uma relação com a discussão sobre o tamanho que os domínios de uma quantificação podem ter em uma semântica fundada nos termos de ZFC. Isso porque o axioma da escolha e a hipótese do continuum são afirmações, respectivamente, sobre nossa capacidade de produzir novos conjuntos a partir de conjuntos previamente dados e sobre a cardinalidade de conjuntos infinitos.[27]

Em meio a tudo isso, falta ainda tratar de uma importante relação cuja descoberta foi grandemente motivada pelos avanços da teoria axiomática dos conjuntos e sua concepção iterativa, a saber, a rejeição da generalidade absoluta e a extensibilidade indefinida de determinados conceitos. Nesse contexto, Michael Dummett certamente foi um dos filósofos que mais contribuíram para trazer à tona essa relação. A seguir eu apresentarei, em seus traços gerais, a abordagem que Dummett oferece à extensibilidade indefinida. No último capítulo eu retornarei ao problema tratando-o de um modo mais sistemático.

2.3. Dummett sobre extensibilidade indefinida de conceitos

Dummett foi, sem dúvida alguma, um dos grandes expoentes do uso da extensibilidade indefinida da concepção iterativa de conjuntos como estratégia contra a legitimidade de quantificações irrestritas. De acordo com Dummett, um conjunto que é indefinidamente extensível expressa a extensão de um conceito com característica semelhante. Essa tese pode ser verificada na seguinte passagem:

> A concept is indefinitely extensible if, for any definite characterization of it, there is a natural extension of this characterization which yields a more inclusive concept; this extension will be made according to some general principle for generating such extensions, and, typically the extended characterization will be formulated by reference to the previous unextended characterization. (Dummett, 1978: p. 195-6)

[27] Para discussões mais aprofundadas sobre a hipótese do continuum seja em seus aspectos mais técnicos, seja em suas consequências filosóficas Cf. Cohen (1966) e Smullyan e Fitting (1996).

Ainda nesse contexto, Dummett (1991: p. 316) sustenta também a posição de que os paradoxos envolvidos na disputa em torno da legitimidade de quantificações irrestritas não implicam a inconsistência das extensões de determinados conceitos, mas, antes, revelam a importante característica de que os conceitos em questão são indefinidamente extensíveis, ou seja, que a extensão desses conceitos pode ser sempre ampliada por algum princípio cumulativo. É precisamente isso que destacam o paradoxo de Russell e o teorema de Cantor com relação à noção de conjunto e o paradoxo de Burali-Forti com relação à noção de número ordinal. Nesse sentido, tais paradoxos podem ser interpretados enquanto provas da infinita extensibilidade de determinados conceitos. Seguindo um raciocínio similar ao apresentado por Dummett (1991: p. 316-19), podemos definir um conceito como indefinidamente extensível do seguinte modo:

> ***Definição*** Um conceito *P* é indefinidamente extensível caso haja um "princípio de extensão" que quando aplicado a qualquer totalidade definida *t* de objetos que satisfazem *P*, produza um objeto que também satisfaz *P*, mas que não é membro de *t*.

No que diz respeito à teoria dos conjuntos, essa intuição está inteiramente associada à nossa concepção iterativa estabelecida em ZFC. No teorema de Cantor, o princípio de extensão é dado pela operação de potência de conjuntos onde para cada conjunto podemos obter o conjunto das partes desse conjunto que contém membros que não pertencem ao conjunto inicial.

Dummett (1991: p. 319) afirma ainda que, pelas razões mencionadas ao longo deste trabalho a respeito da semântica dos quantificadores, sentenças quantificadas de maneira irrestrita – enquanto quantificações sobre um domínio indefinidamente extensível – não podem ter condições de verdade determinadas nos mesmos termos da semântica clássica, onde o domínio da quantificação está ontologicamente pré-estabelecido; algo como o infinito atual discutido em filosofia da matemática. Em verdade, quantificações irrestritas devem ser compreendidas sempre em associação a um procedimento efetivo de extensão do domínio associado ao quantificador e, portanto, só podem ser satisfatoriamente interpretadas através de uma semântica construtivista. A posição de Dummett pode ser sintetizada através da seguinte passagem:

> Quantification over the objects falling under an indefinitely extensible concept obviously does not yield statement with determinate truth-conditions, but only ones embodying a claim to be able to cite an instance or an effective operation; and the logic governing such statement is not classical, but intuitionistic. Adoption of such a solution therefore entails a revision of mathematical practice in accordance with constructivist principles. (Dummett, 1991: p.319)

Contudo, como fica claro ao final desta última passagem, a proposta de Dummett carrega o que para muitos é um alto e incômodo preço de abdicar da lógica clássica em favor de uma lógica intuicionista. Aqueles que dizem *alto* e *incômodo* preço alegam que, à primeira vista, essa mudança de perspectiva possa parecer mera matéria de disputa filosófica, mas, no que diz respeito às quantificações realizadas, por exemplo, na prática matemática, significaria uma completa revisão de um conjunto enorme de resultados que foram provados com base em princípios lógicos que não são intuicionisticamente aceitos. No último capítulo eu tratarei em mais detalhes e me posicionarei a respeito das implicações de um tratamento não-clássico do problema da quantificação irrestrita. Desse modo, por hora não vou me deter em analisar os desdobramentos da afirmação de Dummett.

De acordo com Dummett (1981: p.567), os paradoxos da teoria dos conjuntos nos ensinaram a lição de que não devemos interpretar variáveis individuais e quantificações à maneira de Frege, ou seja, que os domínios de quantificações não podem cobrir ou percorrer simultaneamente a totalidade irrestrita de objetos representados significativamente pelas variáveis. A abordagem conjuntística da semântica para a lógica de predicados impõe sempre o uso de domínios restritos. Para fundamentar sua posição, Dummett (1981: p. 569-70) defendeu que cada domínio associado a variáveis individuais constitui a extensão de algum termo geral substantivo (*substantival*). Em outras palavras, isso equivale a dizer que todo domínio de quantificação possui uma restrição sortal estabelecida pelo termo substantivo associada ao quantificador. Para Dummett, um termo geral é dito substantivo caso ele ajude a estabelecer critérios de identidades que permitam a reidentificação de suas instâncias e, portanto, possibilite a diferenciação delas com relação a outras entidades que não instanciam o mesmo termo em questão. É importante destacar que Dummett utiliza aqui a noção fregeana de critério de identidade apresentada em *Grundlagen*

§66 de acordo com a qual um critério de identidade deve prover o indivíduo de meios de reconhecer um objeto novamente como o mesmo em diferentes contextos. Como Rayo e Uzquiano (2006: p.12) chamam atenção, de acordo com Dummett, ao prover critérios de identidade, um termo geral substantivo *F* proporciona meios para responder a questão "Quantos objetos *Fs* essa sala contém?", por exemplo, "Quantas janelas esta sala contém?". Um termo geral não substantivo tal como "coisa" não permite uma resposta direta – livre de divagações e pressuposições metafísicas – à pergunta "Quantas coisas há nesta sala?".

Desse modo, se Dummett está correto em sua avaliação, não seria viável uma quantificação irrestrita, pois uma quantificação de tal tipo pressuporia um domínio absoluto que operasse com relação a termos gerais absolutamente inclusivos tais como "coisa", "objeto" ou "particular" como se eles fossem termos gerais substantivos, ou seja, dotados de critérios de identidade bem definidos; o que de fato não ocorre. Com isso, Dummett pensou ter oferecido um razoável argumento para mostrar que na semântica clássica toda quantificação deve estar invariavelmente vinculada a um termo geral substantivo para que ela seja significativa. Consequentemente, toda quantificação deve ser restrita através de parâmetros sortais. É digno de nota que grande parte dessas afirmações é apresentada por Dummett em *Frege: Philosophy of Language* a partir de sua avaliação das teses que Geach sustenta em seu livro *Reference and Generality*. Em linhas gerais, Geach defende a ocorrência de restrições sortais agindo sobre nossas quantificações. Para uma compreensão mais detalhada das teses de Dummett sobre quantificações, sua análise do trabalho de Geach é certamente esclarecedor. No entanto, para não me desviar dos objetivos principais deste trabalho, não irei aqui entrar numa discussão acerca do debate que Dummett trava com Geach.

***

Tendo apresentado neste capítulo um panorama geral do problema da legitimidade da quantificação irrestrita destacando um leque muito extenso de argumentos, muitos deles fundados em pressupostos tão díspares, é recomendável aqui fazer uma síntese do cenário revelado nas páginas anteriores. Penso que assim podemos ter uma compreensão mais sólida do que vem pela frente.

Podemos distinguir algumas etapas da argumentação sobre o problema da legitimidade da quantificação irrestrita:

i. O problema em questão é basicamente o de saber se existem situações efetivas onde o uso de quantificadores que não carreguem consigo uma restrição nem explícita nem implícita a um domínio contextualmente relevante de objetos. Ao que parece, pelo menos algumas de nossas afirmações teóricas e também do nosso discurso cotidiano pré-filosófico parecem indicar que esse uso é sim pretendido. Ignorar isso seria uma desonestidade intelectual.

ii. Sendo quantificadores – na lógica e na maioria das linguagens naturais – ferramentas para expressar a generalidade, i.e., *verdades* gerais, de um ponto de vista da semântica formal, o problema é saber se temos os recursos técnicos adequados para expressar verdades absolutamente gerais. Em outras palavras, o problema levantado é o de saber se existe uma abordagem semântica consistente dos supostos usos irrestritos de quantificadores. Os argumentos lógicos contra a quantificação irrestrita parecem apontar na direção de uma resposta negativa. Isso nos leva ao terceiro ponto.

iii. De acordo com a *semântica padrão* dos quantificadores exposta no cap. 1 a resposta quanto à questão do ponto anterior é de fato negativa. Com isso, se ainda pretendemos manter quantificações irrestritas, então é preciso investigar possibilidades que dispensem tal semântica padrão. Dummett acena de maneira simpática em direção ao intuicionismo. Outras alternativas serão apresentadas nos próximos capítulos.

É um grande truísmo dizer que um debate genuíno só existe quando há pelo menos dois lados em disputa acerca de uma questão. Por isso, para pôr as engrenagens da lógica e da filosofia da quantificação irrestrita para se movimentar, é preciso também apresentar a reação dos defensores de tais quantificações aos argumentos apresentados ao longo do presente capítulo. Tendo esboçado o quadro geral dos argumentos que põem os principais obstáculos à quantificação irrestrita e, consequentemente, ao nosso discurso sobre a generalidade absoluta, é importante apresentar as tentativas de superação desses obstáculos. Somente assim podemos ter uma compreensão clara das dimensões do debate em questão. Esse é basicamente o objetivo que pretendo cumprir no próximo capítulo.

3
SALVANDO A QUANTIFICAÇÃO IRRESTRITA
Para além dos paradoxos

Diante dos obstáculos impostos pelos paradoxos da teoria dos conjuntos, há ainda um cenário possível a partir do qual possamos argumentar favoravelmente a quantificações irrestritas? Essa é a pergunta fundamental que mantém aquecido o debate sobre a possibilidade de um tratamento formal e coerente da generalidade absoluta. Inúmeros são os meios de responder a essa pergunta, muitos deles podendo ser agrupados em linhas estratégicas de abordagem do problema. Na primeira parte do presente capítulo pretendo apresentar algumas alternativas favoráveis à quantificação irrestrita que ilustrem essas linhas estratégicas. Além disso, na segunda parte, me ocupo em discorrer sobre alguns tópicos que compõem o *background* filosófico da discussão, a exemplo dos seus pressupostos metafísicos, bem como sobre a relação estreita entre os argumentos contra a quantificação irrestrita e regressos ao infinito. Essa segunda parte deverá fundamentar a passagem para uma mudança de perspectiva que realizarei no último capítulo.

A literatura em favor da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta apresenta uma recorrente objeção aos oponentes de tais quantificações de acordo com a qual a própria formulação da rejeição de uma quantificação sem restrições de domínio já pressupõe aquilo que ela pretende negar. Em outras palavras, essa objeção sugere que ao afirmar algo como "Não podemos quantificar sobre absolutamente tudo" já quantificamos e nos comprometemos com algo sobre o qual, em tese, não poderíamos quantificar, a saber, um domínio oniabrangente. Ao tentar formular a tese da rejeição imediatamente somos compelidos a assumir a existência daquilo que pretendemos rejeitar. Desse modo, a rejeição a quantificações irrestritas não seria consistentemente sustentável. Rayo e Uzquiano (2006: p. 2-3) também chamam atenção para essa pressuposição da generalidade absoluta ao mostrar que o debate, da maneira como ele é formulado, parece favorecer o proponente de quantificações irrestritas. Alguém poderia formular a tese contra domínios absolutos de quantificação nos seguintes termos: para todo domínio D, há pelo menos um particular *x* que não pertence a D. O problema é que essa tese é pretensamente quantificada sob *todos* os domínios e, portanto, envolveria novamente uma quantificação irrestrita.

Há aqui ainda outro ponto a ser destacado. Mesmo que argumentos do tipo da indispensabilidade da quantificação irrestrita estiverem corretos, não sendo possível, portanto, negar o discurso sobre a generalidade absoluta, ainda assim, a defesa de quantificações irrestritas deve enfrentar o desafio de mostrar que tal generalidade está disponível do ponto de vista técnico e epistêmico, enquanto domínio de uma quantificação. Quando nos perguntamos o que vem a ser essa generalidade e como podemos lidar com ela de uma maneira técnica dentro de nossos sistemas formais, entramos no núcleo básico da defesa de quantificações irrestritas. Por isso, os argumentos de caráter lógico apresentados nos capítulos anteriores possuem uma centralidade no debate, pois são fundamentalmente eles que impõem os desafios de argumentar em favor da existência e do acesso a uma generalidade absoluta enquanto base de quantificações irrestritas.

No presente capítulo, tratarei tanto das tentativas de oferecer respostas diretas aos argumentos de caráter técnico contra a legitimidade de quantificação irrestrita, quanto apresentarei um esboço geral do que é o argumento da incoerência da rejeição, ou seja, o argumento de que a própria tese da ilegitimidade de quantificações irrestritas envolve uma quantificação do tipo que ela pretende refutar.

Resgatando o que foi dito acima, precisamos ter em mente aqui que, mesmo que de um ponto de vista metafísico a existência da generalidade absoluta seja algo inegável, disso, por si só, não implica que temos acesso semântico ou epistêmico a ela. Para muitos, algum tipo de acesso deste nível é fundamental para a defesa da quantificação irrestrita. O cenário que tomará forma de agora em diante destaca diversas estratégias de enfrentamento do problema que estão associadas a diferentes posturas com relação às quantificações irrestritas e à generalidade absoluta. Ao longo deste e do próximo capítulo pretendo me ocupar em diferentes instâncias dessas estratégias. Podemos classificá-las da seguinte forma:

Estratégia 1 – Oferecer uma teoria dos conjuntos alternativa com relação à ZFC a partir da qual possa ser formalizado um discurso sobre generalidades absolutas sem cair em paradoxos lógicos, mantendo assim a abordagem semântica conjuntística que marca a teoria dos modelos.

Estratégia 2 – Assumir a indisponibilidade, seja por razões meramente epistêmicas ou metafísicas, de um domínio oniabrangente – e, consequentemente, da generalidade absoluta – para quantificações irrestritas; sendo tal domínio compreendido conjuntisticamente. Em contrapartida, oferecer uma semântica alternativa para quantificadores que dispense a noção de domínio enquanto conjunto.

Estratégia 3 – defender um argumento da indispensabilidade das quantificações irrestritas, de acordo como qual a tese da ilegitimidade de tais quantificações não pode ser formulada coerentemente, dado que sua formulação já implica alguma sentença quantificada sem restrições de domínio. Esta estratégia é basicamente uma tentativa de defender a legitimidade de quantificações irrestritas reduzindo a posição contrária a um absurdo.

Para melhor orientar o leitor, ao longo do presente capítulo tentarei oferecer alguns exemplos ilustrativos das três estratégias. No entanto, a *Estratégia 1* será superficialmente abordada nesse primeiro momento, uma vez que ela retornará no capítulo final ocupando uma posição central na discussão que lá será desenvolvida. Minha pretensão não é esgotar a análise dessas estratégias – tal tarefa seria impossível de executar aqui –, mas traçar o cenário geral de possibilidades às quais o defensor da quantificação irrestrita pode recorrer.

Que os resultados técnicos obtidos por intermédio dos paradoxos apresentados no primeiro capítulo possuem implicações relevantes sobre o tópico da generalidade absoluta é algo que não se pode negar. No entanto, quando lógicos e filósofos tentam descrever de maneira precisa essas implicações, eles parecem não chegar a um consenso ou mesmo a uma voz dominante. Por um lado, uma corrente sustenta que a extensibilidade indefinida de itens como conjuntos torna inviável uma quantificação irrestrita nos moldes da semântica padrão dos quantificadores. Por outro lado, há quem defenda que a extensibilidade indefinida constitui apenas a mera impossibilidade de existência de um domínio todo inclusivo; mas que a inexistência de tal domínio não necessariamente inviabiliza quantificações irrestritas.[28] Uzquiano (2009: p. 300) ressalta que essas duas posturas carregam diferentes ideologias filosóficas: a primeira corrente parece sustentar uma tese sobre os limites da linguagem e do pensamento, ao passo que a segunda, caso ela esteja correta, aponta para o que ele pensa ser uma descoberta ontológica. Essas duas posturas ficam mais claras ao retomarmos a dupla questão associada ao problema da quantificação irrestrita que antecipei na introdução deste trabalho.

(I) A questão metafísica: Há um domínio absoluto do discurso?
(II) A questão linguística: É possível realizar de maneira consistente quantificações irrestritas?

A despeito das leituras filosóficas que possam ser feitas, o que muitos dos últimos resultados técnicos obtidos entorno do tema tentam provar é que a impossibilidade da existência efetiva ou da capacidade de construção de um domínio conjuntisticamente pensado e composto por absolutamente tudo não implica necessariamente a impossibilidade de uma quantificação irrestrita. Em outras palavras, uma resposta negativa para (I) não implicaria uma resposta igualmente negativa para (II). Nesse caso, os proponentes desta tese tentam mostrar que deve haver algo que torne possível uma quantificação irrestrita sem que ela esteja ligada a uma coleção ou totalidade que suprisse os requisitos modelo-teóricos da semântica padrão dos quantificadores. É fundamentalmente sobre alguns desses recentes resultados que pretendo tratar ao longo deste capítulo.

Há uma grande confusão em torno do que realmente está em jogo na discussão sobre quantificação e totalidades irrestritas. Assumindo – tal como costumeiramente fazemos – a semântica padrão dos quantificadores, a questão da quantificação irrestrita é tanto uma questão *semântica* quanto *ontológica*, pois ela não pode ser solucionada sem uma discussão sobre totalidades irrestritas. No entanto, não há nada que prove que a semântica padrão seja um recurso insubstituível e indispensável. Por outro lado, a discussão sobre a existência pura de uma totalidade irrestrita e, portanto, de uma generalidade absoluta, prescinde qualquer debate sobre quantificações e é travada em um campo fundamentalmente ontológico: se há algo como o conjunto de tudo o que há, esse conjunto existe

[28] Uzquiano (2009: p.320) aponta Glanzberg (2004; 2006) e Parsons (2006) como defensores da primeira corrente; ao passo que Fine (2006) e Hellman (2006) integrariam o grupo de proponentes da segunda.

mesmo que não haja nenhuma linguagem para expressá-lo. Nós, humanos, somos dotados de um forte apelo a totalidades. Pensamos em conjuntos de maneira irresistivelmente intuitiva. Faz parte da tentativa de olhar os problemas por outra perspectiva demarcar as diferenças entre semântica e ontologia, ou ainda, entre a quantificação irrestrita e a generalidade absoluta.

3.1 Questionando a semântica padrão

Nos últimos anos vem se tornando cada vez mais forte a postura de que a discussão sobre a possibilidade de uma teoria baseada em uma generalidade absoluta foi subvertida pela pressuposição não legítima de que uma quantificação irrestrita deve necessariamente pressupor um domínio absoluto. De acordo com Fine (2006), para que uma quantificação seja caracterizada como irrestrita as variáveis ligadas ao quantificador não precisam percorrer um conjunto absoluto, tal como o conjunto universo.

Christina Schneider (2007) figura como uma das defensoras da ideia de que é possível lançar mão de uma teoria dos conjuntos alternativa para reabilitar a noção de generalidade absoluta e, portanto, realiza um tratamento do tópico da quantificação irrestrita com base na *Estratégia 1* descrita acima. Basicamente, ela constrói a defesa dessa tese com base na crítica ao argumento que Grim desenvolve em *The incomplete universe* e que foi apresentado em seus traços gerais no capítulo anterior. De acordo com Schneider, a distinção entre conjunto e classe própria introduzida pela teoria dos conjuntos de Kelley-Morse (KM) seria suficiente para lidar de maneira técnica e consistente com a noção de totalidade irrestrita enquanto uma totalidade aberta. Em KM, um conjunto é definido como todo agregado que possa figurar como elemento de outro agregado, ou uma coleção que possa pertencer à outra coleção. Em outras palavras,

x é conjunto $\leftrightarrow \exists y\ (x \in y)$

Nesse sentido, é de extrema importância em KM que os conjuntos se comportem de maneira bem definida de acordo com certos axiomas básicos. Por exemplo, se x e y são conjuntos de KM, então $\{x,y\}$, $\wp(x)$ e $\wp(y)$ são também conjuntos de KM. No entanto, em KM há o que chamamos de *classes genuínas* que são definidas como agregados ou coleções que não são membros de nenhum outro agregado ou coleção, ou seja,

z é uma classe genuína $\leftrightarrow \neg\exists y\ (z \in y)$

O exemplo mais óbvio do que venha a ser uma classe genuína no sentido afirmado acima é a famigerada classe universo (U) que, em KM, pode ser definida com base no princípio de auto identidade:

$U = \{x \mid x=x\}$

Além disso, Schneider alega que KM teria ainda a virtude de evitar os resultados obtidos por Russell e Cantor. Em KM valeria o argumento de Cantor para conjuntos exatamente como ocorre em ZFC. No entanto, ele seria inócuo para classes genuínas. O teorema 37 de KM afirma que $U = \wp(U)$, ou seja, a classe universo e sua classe potência são idênticas e, portanto, possuem a mesma cardinalidade.[29] Como Schneider chama atenção, podemos estabelecer uma função identidade com domínio em U e contradomínio em $\wp(U)$. A distinção entre conjunto e classe genuína introduzida em KM visa captar a nossa concepção intuitiva de totalidade enquanto uma coleção aberta onde toda operação realizada sobre ela só deve revelar itens que já estejam contidos na própria classe. Nesse sentido, uma operação como a de potência não tem efeito gerativo para classes genuínas.

3.2 Reduzindo a rejeição a quantificações irrestritas ao absurdo

Além da estratégia de questionar a real necessidade da semântica padrão para o tratamento do problema, há ainda uma destacável linha de argumentação em favor das quantificações irrestritas que constitui uma defesa por via indireta. Essa linha caracterizada acima pela *Estratégia 3* se pretende bastante incisiva na medida em que ela sugere que a tese da rejeição de tais quantificações não pode ser coerentemente formulada, ou seja, sua formulação conduziria a alguma contradição fundamental. Este argumento está presente em diferentes fontes. Ele é tanto apresentado por Uzquiano (2014), como defendido por Williamson (2003) e McGee (2006: p. 185). Na falta de um nome mais adequado, vou chamá-lo aqui de *argumento da incoerência da rejeição*, uma vez que o que ele pretende mostrar é que não podemos dispensar ou eliminar completamente quantificações irrestritas do nosso discurso, pois sua rejeição implicaria alguma contradição.

[29] Cf. Kelley (1955: p. 257, teorema 37).

Podemos falar de uma versão compacta e de uma versão estendida do argumento da incoerência da rejeição, mas essa divisão está, de certo modo, fundada exclusivamente no grau de desenvolvimento formal do argumento. Em última instância, ambas as versões obtêm a mesma conclusão. Em sua versão compacta, seus proponentes apelam para regras de inferência que regem o comportamento dos quantificadores como a razão para a não coerência da rejeição de quantificações irrestritas. Nesse sentido, a rejeição da quantificação irrestrita é não coerentemente formulável, pois ela é incompatível com as regras de inferência para quantificadores. Em sua versão estendida, seus proponentes mostram como efetivamente reduzir a tese da rejeição de quantificações irrestritas a uma contradição.

Um exemplo da versão compacta do argumento é encontrado em Uzquiano (2014) e pode ser reconstruído aqui em seus traços gerais como segue: se pretendo afirmar que não podemos quantificar sobre absolutamente tudo, de um ponto de vista clássico, isso deve implicar que há algo sobre o qual não podemos quantificar irrestritamente. Não obstante, ao proferir essa última afirmação, já estamos de algum modo quantificando irrestritamente sobre a entidade que afirmamos escapar os limites da quantificação. Vejamos em mais detalhes como isso se dá.

O argumento acima pode ser reconstruído a partir de uma simples aplicação de uma inferência básica da lógica de predicados de primeira ordem, a saber,

$$\frac{\neg\forall x\varphi x}{\exists x\neg\varphi x}$$

Quando aplicada à discussão sobre os limites da quantificação, a sentença quantificada universalmente afirma que não é o caso que absolutamente todo objeto é passível de ser compreendido pelo domínio de uma quantificação; o que equivale a afirmação de que quantificações irrestritas não são possíveis.[30] No entanto, a própria sentença quantificada universalmente só parece afirmar o que o oponente da quantificação irrestrita pretende caso o quantificador universal da sentença em questão percorra um domínio sem restrições. Nesse contexto, o

[30] O uso da regra de inferência acima é uma grosseira ilustração. Para ser rigoroso, a formalização deveria envolver algum operador modal tal como o de possibilidade (◊). Pois do mero fato de que não há quantificações irrestritas não segue-se que elas não são possíveis. Ignoro aqui essas complicações para tornar mais direta a apresentação do argumento.

predicado φ expressa a condição ou a propriedade de “pertencer ao domínio de uma única sentença quantificada”. Desse modo, poderíamos inferir a sentença existencialmente quantificada de que há pelo menos um objeto que escapa ao domínio de qualquer quantificação pretensamente irrestrita. A questão que se põe é: de que domínio relevante estamos destacando esse objeto indômito para a quantificação irrestrita? Aparentemente também não há nenhuma cláusula restritiva que determina o domínio da quantificação existencial. O que estamos a dizer é basicamente que dada a totalidade do que existe – a generalidade absoluta – há sempre pelo menos um objeto que escapa o domínio de qualquer quantificação, por mais inclusiva que esta seja. O domínio que a variável quantificada existencialmente percorre expressa uma generalidade absoluta. Nesse sentido, compreendida nesses termos, a expressão da rejeição de quantificações irrestrita pressupõe aquilo que ela quer rejeitar. Isso indica uma petição de princípio agindo na tese da rejeição da quantificação irrestrita.

Fazendo uma pequena digressão antes de prosseguir, há uma observação curiosa que pode ser feita aqui; embora não seja minha pretensão desenvolvê-la em detalhes. Se o argumento acima estiver correto, tendo em vista que a inferência em destaque não é intuicionistamente válida, então há algo no argumento que conta a favor de Dummett em sua sugestão de que o uso de uma lógica intuicionista pode revelar interessantes aspectos aplicáveis ao debate sobre a reabilitação de quantificações irrestritas; aspectos esses que a lógica clássica não comporta.

Em seu famoso artigo *Everything*, Timothy Williamson (2003) também defendeu uma versão do argumento da incoerência da rejeição, mas que se assemelha mais ao que chamei acima de “versão estendida”. De acordo com Williamson, a formulação desse argumento sofre com os mesmos obstáculos que enfrentamos ao tentar traçar limites tais como o das expressões linguísticas ou do pensamento em geral. Na filosofia do século xx, esses obstáculos constituíram o tema básico que alimentou a filosofia de Wittgenstein. Em seu prefácio ao *Tractatus Logico-Philosophicus,* Wittgenstein afirma sobre o pensamento que “com o objetivo de traçar os limites para o pensar, deveríamos poder pensar os dois lados desse limite (deveríamos, portanto, poder pensar o que não pode ser pensado)”. Essa intuição corre de maneira similar no argumento da incoerência da rejeição. O proponente de tal argumento afirma que, ao tentar expressar os limites da quantificação, acabamos quantificando sobre itens dos dois lados da fronteira; em outras palavras, nós quantificamos sobre absolutamente tudo.[31] Se quisermos tomar emprestado a terminologia tractatiana, a tese da rejeição de quantificações irrestritas é um contra-senso.

Williamson (2003: pp. 21-33) tentou mostrar de maneira objetiva como esse contra-senso ou essa contradição surge a partir da rejeição de quantificações irrestritas. No que segue, tentarei reproduzir a estrutura geral do argumento tal como Williamson o apresenta fazendo apenas algumas pequenas concessões expositivas para que o argumento fique mais compreensível.

Primeiramente, para simplificar a exposição do argumento, vou chamar de Sr. X ao oponente de quantificações irrestritas.[32] Williamson parte inicialmente da tese básica da rejeição de quantificações irrestritas sustentada pelo Sr. X:

(1) É impossível quantificar sobre tudo.

Obviamente, o que o Sr. X pretende afirmar deve valer para sua própria sentença (1), caso contrário a quantificação irrestrita seria possível para pelo menos uma sentença, a saber, (1). Em outras palavras, a sentença (1) ela própria não pode ser uma quantificação irrestrita. Desse modo, o Sr. X assume também a seguinte sentença:

(2) Eu não estou quantificando sobre tudo.

Fazendo um simples apelo ao recurso da paráfrase, em (2) o Sr. X está afirmando o mesmo que:

(3) Há algo sobre o qual eu não estou quantificando.

Neste ponto do argumento, Williamson introduz um parâmetro temporal para as afirmações a respeito da sentença (1). O Sr. X profere (3) em um determinado tempo t_0. Supondo que a afirmação do Sr. X é verdadeira, então, podemos concluir que:

(4) "Há algo sobre o qual eu não estou quantificando" é verdadeira quando proferida pelo Sr. X em t_0.

---

[31] Essa posição também está expressa claramente – embora formulada em outros termos – na afirmação de David Lewis que alguém que afirma "that some mystical censor stop us from quantifying over everything without restriction, (...) he violates his own structure in the very act of proclaiming!" (Lewis, 1991: p. 68)

[32] Em seu texto, Williamson não usa tal filósofo como personagem do argumento, preferindo denominá-lo de "generality-relativist". Minha alteração possui razões meramente de estilo. Caso o leitor estranhe o excêntrico nome do filósofo fictício em questão, para concedê-lo mais familiaridade, pode considerá-lo um parente menos famoso do filósofo McX de Quine.

Com base nos princípios básicos da semântica padrão apresentados no primeiro capítulo e no que está sendo afirmado em (4), podemos inferir que:

(5) "Algo é um F" é verdade quando proferida por um sujeito *s* em um tempo *t* se, e somente se, algo sobre o qual *s* está quantificando em *t* satisfaz F na ocasião do proferimento de *s* em *t*.

Nesse sentido,

(6) Algo satisfaz "ser algo sobre o qual não estou quantificando" quando proferido por *s* em *t* se, e somente se, esse mesmo algo não está sendo quantificado por *s* em *t*.

E agora, a partir de (4) e (5) obtemos que:

(7) Algo sobre o qual o Sr. X está quantificando em t_0 satisfaz "não está sendo quantificado por mim" quando proferida pelo Sr. X em t_0.

Com base em (6) e (7), obtemos que:

(8) Algo sobre o qual o Sr. X está quantificando em t_0 não está sendo quantificado pelo Sr. X em t_0.

Obviamente, (8) é uma contradição. Com esse argumento, Williamson pretende ter provado por redução ao absurdo que as sentenças (2) e (3) acima não podem ser sustentadas como verdadeiras. Além disso, dado o fato de que (2) e (3) são obtidas ambas como nada mais que um desdobramento de (1), e dado o fato de que (1) expressa a rejeição da legitimidade de quantificações irrestritas, o argumento proposto por Williamson pretende ser, em última instância, uma defesa da impossibilidade de formular coerentemente a oposição a tais quantificações. Por um lado, se a expressão "tudo" que ocorre em (1) for tomada como restrita, então podemos obter a contradição expressa em (8). Por outro lado, caso a expressão "tudo" na mesma sentença for tomada como irrestrita, então (1) está se auto contradizendo.

Numa tentativa de fortalecer o argumento, o próprio Williamson discute também a possibilidade de alguém usar a distinção entre linguagem objeto e metalinguagem para sustentar uma interpretação coerente de (1). A ideia seria entender a sentença (1) como pertencendo a uma metalinguagem L* realizando uma afirmação a respeito das quantificações internas a uma determinada linguagem-objeto L. Com base nisso, o Sr. X poderia reconstruir o argumento da seguinte forma:

(1L*) É impossível quantificar sobre tudo em L.

Dado que (1L*) é uma sentença da metalinguagem L*, ela não está afirmando nada sobre ela mesma do modo como a sentença (1) pode estar. De modo análogo, o argumento pode continuar sendo reconstruído com base na distinção de níveis de linguagem:

(4L*) "Há algo em L sobre o qual eu não estou quantificando" é verdadeira em L* quando proferida pelo Sr. X em t_0.

(5L*) "Algo é um F" é verdade em L* quando proferida por um sujeito *s* em um tempo *t* se, e somente se, algo sobre o qual *s* está quantificando em L* num dado tempo *t* satisfaz F na ocasião do proferimento de *s* em *t*.

(6L*) Algo satisfaz "ser algo sobre o qual não estou quantificando em L" em L* quando proferido por *s* em *t* se, e somente se, esse mesmo algo não está sendo quantificado em L por *s* em *t*.

E com base nas sentenças acima (4L*), (5L*) e (6L*), podemos obter apenas uma versão no nível metalinguístico de (8) que está isenta de contradições.

(8L*) Há algo sobre o qual o Sr. X está quantificando em L* num tempo t_0, mas não está sendo quantificado pelo Sr. X em L no mesmo tempo t_0.

Não obstante, embora a saída seja elegante e aparentemente satisfatória, Williamson destaca que ela possui uma desvantagem importante que a torna inviável como resposta em favor da rejeição de quantificações irrestritas. A sentença (1L*) é fraca demais para expressar aquilo que o oponente de quantificações irrestritas sustenta. O Sr. X, enquanto um adversário do discurso sobre totalidades irrestritas, não quer afirmar a limitação sobre quantificações irrestritas restritas a uma linguagem, mas a absolutamente todas as linguagens. Ao tentar expressar essa ideia o Sr. X poderia recorrer a uma generalização do seguinte modo:

(1M*) É impossível quantificar sobre tudo em M.

onde M* é uma variável para a metalinguagem de uma linguagem-objeto M qualquer. Williamson sugere que essa afirmação pode ser reconstruída substituindo a noção de *linguagem* por uma noção mais ampla de *contexto*.

(1C) Nem tudo pode ser quantificado em um contexto C qualquer.

Ocorre que, se (1C) for uma sentença do contexto C, então podemos obter uma contradição do tipo expresso em (8). Se (1C) for uma sentença metalinguística ela levanta a pretensão de estar quantificando sobre absolutamente todo contexto; o que novamente conduziria a uma contradição. Com isso, Williamson pretende ter provado que é impossível formular a rejeição de quantificações irrestritas de maneira coerente.

De modo geral, embora a estratégia da incoerência da rejeição possa parecer atraente, ela enfrenta alguns obstáculos. Uma objeção comum apresentada contra ela é a de que sua solução escamoteia o problema. Em outras palavras, ela propõe uma solução ao problema não enfrentando-o efetivamente, mas dissolvendo-o. Não haveria um problema da quantificação irrestrita, pois, em última instância, ele não é sequer formulável coerentemente. Eu particularmente acho essa crítica razoável. Penso que ele foi deixado intacto por este tipo de estratégia. O argumento de Williamson conta muito mais como uma manobra de diversão, algo como o *puzzle* da quantificação irrestrita, do que como uma estratégia efetiva e direta de resolução do problema. Ora, é preciso agora de uma resposta que enfrente diretamente o problema.

Não pretendo aqui defender uma resposta do gênero da apresentada por Williamson, pois, ao meu ver, o uso indiscriminado dessa estratégia incorre na desvantagem de jogar panos quentes no conjunto relevante de resultados lógicos que impõem obstáculos à formulação de modelos para quantificações irrestritas. Minha ideia é que, se os proponentes do argumento da incoerência da rejeição estão corretos, então deve haver algo que seja o domínio de uma quantificação irrestrita. O problema é como apresentar tal domínio em termos que dispensem a semântica padrão juntamente com suas limitações. Essa é basicamente a questão que será retomada no último capítulo e que, ao meu ver, indica um enfrentamento efetivo do problema.

No entanto, antes de atacar de frente o problema, quero ainda explorar a relação entre a semântica de termos lógicos e a quantificação irrestrita, bem como discutir alguns aspectos metafísicos do debate. Penso que o principal ganho nessa digressão encontra-se no fato de que uma compreensão mais clara dos bastidores filosóficos da quantificação irrestrita podem produzir os *insights* necessários para uma abordagem alternativa – não clássica – do problema.

3.3 Quantificação Irrestrita e a semântica de termos lógicos

A preocupação fundamental do que chamei de “semântica padrão dos quantificadores” nos termos em que ela foi apresentada no primeiro capítulo, é prover as regras básicas de interpretação de sentenças quantificadas existencialmente ou universalmente. Em outras palavras, responder a questões tais como: o que uma quantificação significa? Como compreender uma sentença quantificada? Da forma como foi brevemente mencionado no primeiro capítulo, uma respeitável posição em semântica lógica que remete, em última instância, a nomes como o de Gentzen (1969: p. 80), defende que o sentido de termos lógicos é dado ou estabelecido por intermédio de regras de inferência. Obviamente, se essa tese estiver correta, o mesmo vale para quantificadores, tendo em vista que eles são exemplos claros de termos lógicos.

É nesse contexto que McGee (2006) tenta reconstruir o debate sobre a legitimidade de quantificações irrestritas em termos do que ele pensa ser uma abordagem ainda mais fundamental do problema, a saber, a questão da existência de uma regra para o nosso uso formal da expressão "tudo" quando tomada irrestritamente. A justificativa para isso provém do fato de que compreender a semântica de termos lógicos em geral constitui uma etapa fundamental para a própria compreensão e comunicação linguística, uma vez que tais termos são o material de construção de todas as sentenças complexas. Mais adiante eu irei tratar em mais detalhes a defesa da quantificação irrestrita desenvolvida por McGee. Por hora, pretendo meramente apresentar sua concepção do que seja o significado de quantificações lógicas. A compreensão de tal concepção será importante para o que posteriormente será tratado.

Para McGee (2000), são as regras de inferência que determinam o significado dos quantificadores. De maneira geral, nós assimilamos o significado dos quantificadores na medida em que apreendendo suas regras de uso, ou seja, a prática linguística de aplicação do termo questão. Em última instância, tais regras são estipuladas por meio dos mecanismos de inferência de um sistema dedutivo. Em geral, as regras de inferência são apresentadas a nós em seu duplo aspecto, a saber, uma regra de introdução e outra de eliminação de uma dada constante lógica. O mecanismo é bastante simples. Essas regras mostram, respectivamente, como derivar uma sentença contendo uma determinada constante a partir de uma sentença – ou um par delas – previamente dada e como, a partir de uma dada sentença contento uma determinada constante lógica, obter novas sentenças onde a constante em questão está ausente.

Embora McGee destaque o papel das regras de inferência na constituição da semântica de termos lógicos, ele precisa dar uma conta de como tais regras efetivamente operam. Para reforçar sua concepção do significado de termos lógicos, McGee apela para dois critérios indicados por Belnap (1962: pp. 120-124) que devem ser satisfeitos para que constantes lógicas sejam bem definidas dentro de um sistema linguístico qualquer. A primeira condição é a *conservatividade*, ou seja, a ideia de que a introdução de uma nova regra de inferência que estabeleça o uso de uma constante lógica no sistema seja compatível ou consistente com as demais regras já estabelecidas no sistema dedutivo. O segundo critério é a *unicidade*, a saber, que as novas regras de inferência definam unicamente a nova constante lógica. Em outras palavras, qualquer outro operador que possamos introduzir no sistema dedutivo em questão obedecendo as mesmas regras de inferências não constitui uma nova constante lógica, mas apenas uma nova notação para a mesma constante.

Guardemos, portanto, esse quadro geral que associa o significado e uso de constantes lógicas – incluindo quantificadores – às regras de inferência a elas associadas. Retomaremos essa informação adiante.

***

O cenário descrito até o presente estágio deste capítulo aponta para inúmeros meios de superar as dificuldades enfrentadas pelo discurso formalizado sobre totalidades irrestritas impostas pela concepção iterativa da teoria axiomática de conjuntos, mas nenhum parece ter a consistência e o poder explanatório necessários para tornar-se hegemônico. Foi observando esse cenário que Wright e Shapiro descreveram o estado da arte no que diz respeito à defesa da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta numa ótica um tanto pessimista:

> Frankly, we do not see a satisfactory position here. It seems that every one of the available theoretical options has difficulties, which would be justly treated as decisive against it, were it not for the fact that the others fare no better. Such situations are not unprecedented in philosophy, but this one seems particularly opaque and frustrating. (Wright & Shapiro, 2006: p. 293)

De minha parte, não sou tão pessimista quanto Wright e Shapiro. Embora eu concorde com eles na ideia de que grande parte das tentativas de solucionar o problema pareça criar seus próprios obstáculos insuperáveis, penso também que algumas possibilidades de avaliação do problema ainda não foram suficientemente exploradas. A ideia de tentar olhar a questão por outro ângulo – pensar fora da caixa – ainda me seduz. Nesse sentido, no que resta deste capítulo, pretendo apresentar alguns aspectos filosóficos fundamentais do problema que me parecem por vezes negligenciados pela literatura, mas que podem oferecer ângulos novos de observação do problema. A ideia que motiva nessa parte do trabalho é que talvez o *insight* básico da solução não seja puramente técnico, mas possa surgir a partir de um olhar filosófico.

3.4 A metafísica da generalidade absoluta

Há ainda outro aspecto que gostaria de explanar sobre uma possível defesa da quantificação irrestrita e da legitimidade da generalidade absoluta dentro dos quadros da lógica clássica e da semântica padrão dos quantificadores. Esse aspecto diz respeito aos fundamentos metafísicos do problema e não pode ser abordado sem uma mínima discussão acerca da filosofia da teoria dos conjuntos.

No segundo capítulo, tentei tornar evidente que um tratamento formal de nossas teorias metafísica, enquanto um discurso sobre a totalidade última da realidade, necessita de quantificações irrestritas e se compromete ontologicamente com a generalidade absoluta. Isso me parece um fato básico sobre a possibilidade de formalização das nossas teorias mais gerais sobre o que chamamos de realidade. No entanto, curiosamente, é também dentro da metafísica que podemos encontrar diferentes olhares sobre a estrutura da realidade, onde alguns desses olhares propõem importantes desafios não só à nossa capacidade de lidar formalmente com a generalidade absoluta – algo que os paradoxos da teoria dos conjuntos já tinham destacado –, mas também à própria legitimidade metafísica da generalidade absoluta enquanto tal. Isso ocorre no contexto de uma crítica interna aos limites teóricos da própria metafísica em lidar com uma totalidade infinita atual de entidades concretas e/ou abstratas. Esses desafios põem face a face diferentes matrizes metafísicas tais como o platonismo e o construtivismo.

Desse modo, penso que a filosofia por trás das quantificações irrestritas apresenta um cenário aparentemente insuperável de retroalimentação entre lógica e metafísica: por um lado, (*a*) assumimos desde o início que a formalização de uma teoria metafísica – no sentido da *metafísica geral* anteriormente definida – pressupõe quantificações irrestritas. Por outro lado, (*b*) nossa forma de lidar com a semântica padrão dos quantificadores já embute em tais quantificações uma série de pressupostos claramente metafísicos. No que se segue imediatamente no presente trabalho, tento apresentar alguns aspectos que tornarão mais clara a relação destacada em (*a*) e (*b*) entre quantificações irrestritas e metafísica. No que diz respeito à análise de (*a*), a questão é saber se quantificações irrestritas são mesmo necessárias para o discurso metafísico. Já, ao discutir o ponto (*b*), pretendo trazer à tona uma tensão entre uma leitura platonista e uma construtivista da nossa teoria dos conjuntos e da semântica padrão dos quantificadores. Comecemos por (*b*).

3.4.1. Entre o platonismo e o construtivismo

Parece-me cada vez mais claro que, da forma como ele foi estabelecido, o problema da quantificação irrestrita está completamente relacionado a uma tensão entre duas posições de natureza metafísica: uma platonista e outra construtivista. Por um lado, pensamos intuitivamente na realidade como um bloco completo de objetos – sejam eles concretos ou abstratos – em relações uns com os outros. Se podemos falar legitimamente de subconjuntos desse bloco maximal de objetos – e de fato falamos constantemente – também parece legítimo falar sobre a totalidade última desses objetos. Essa abordagem não toma a existência da generalidade absoluta com algo em disputa – algo que precisamos provar –, mas como um pressuposto básico de nossas teorias de mundo: nosso mundo não é uma entidade aberta e inacabada, mas uma totalidade maximal e consistente de coisas. Nesse contexto, é digno de nota que, em uma abordagem platonista da teoria dos conjuntos, cada um desses conjuntos é ele próprio um objeto da realidade descrita. É basicamente isso que o princípio tudo-em-um de Cartwright enunciado anteriormente fala acerca de conjuntos: eles são objetos abstratos.

No entanto, há outras maneiras de olhar filosoficamente para a questão. O procedimento infinitamente reaplicável de operações bem definidas que produzem novos conjuntos a partir de conjuntos previamente dados que caracteriza a concepção iterativa presente em ZFC parece expressar uma leitura construtivista de conjuntos: o domínio dos conjuntos é uma totalidade aberta e cumulativa que expandimos a cada aplicação de uma operação apropriada. Em outras palavras, nós construímos conjuntos por intermédio de operações básicas. Por essa ótica, ao *gerar* novos conjuntos, o procedimento que marca a extensibilidade indefinida *gera* também novas entidades. Nesse sentido, a construção infinita de conjuntos entendidos enquanto objetos é também um permanente processo de ampliação da totalidade do que existe. Isso parece indicar que vivemos em um mundo estruturalmente e ontologicamente incompleto e em infinita expansão.

Estamos aqui diante de uma tensão entre duas importantes posições ou matrizes filosóficas aplicadas à teoria dos conjuntos que influenciam de maneira decisiva porções relevantes do conhecimento filosófico. Nossa visão intuitiva sobre a estrutura da realidade parece apontar na direção de um universo completo e determinado, tal como é assumido pelo platonista, mas nossa semântica padrão dos quantificadores comporta apenas um universo incompleto e em expansão mais próximo daquele descrito numa abordagem construtivista. No que segue, pretendo explorar alguns aspectos filosóficos que marcam cada uma dessas abordagens da nossa concepção de conjunto.

Em primeiro lugar, vejamos como a concepção realista platônica atua. Algumas questões sobre a filosofia da quantificação irrestrita e da semântica padrão dos quantificadores podem ser exploradas aqui no sentido de mostrar toda a carga metafísica que ela comporta. Potter (2004: p. 34-6) destaca dois métodos de ordem filosófica por trás das tentativas de superar os impasses advindos dos paradoxos encontrados na teoria dos conjuntos; especialmente o paradoxo de Russell, que pôs em xeque o intuitivo e ingênuo princípio da compreensão. Um método é dito *regressivo* e o outro *intuitivo*. Para Potter, esses dois métodos guiam os platonistas ou realistas acerca dos conjuntos no desafio de superar o problema de que nem toda propriedade sintaticamente bem definida dentro do sistema determina uma extensão.

Por um lado, os adeptos do método regressivo tomam para si a tarefa da axiomatização da teoria dos conjuntos assumindo essa tarefa como bem sucedida caso os axiomas sejam capazes de produzir provas para as afirmações que já sabemos serem verdadeiras por intermédio de outros fundamentos – mais especificamente fundamentos metafísicos –, mas que não sejam capazes de produzir provas para afirmações que, do mesmo modo, já as sabemos falsas. Por mais estranha que essa posição possa parecer, ela está baseada na ideia de que a teoria axiomática dos conjuntos deve espelhar a realidade anterior, independente e abstrata dos conjuntos. Do ponto de vista do realismo platônico, a existência dos conjuntos é completamente independente de nossas teorias formais sobre eles. Curiosamente, temos aqui uma concepção platonista dos conjuntos, mas uma posição pragmática quanto a escolha dos nossos axiomas. Para Potter, ao escolher os axiomas, o objetivo da estratégia regressiva é manter tanto quanto possível a teoria ingênua dos conjuntos, uma vez que ela é a mais bem sucedida em espelhar a concepção realista de conjunto, bem como expurgar apenas aquilo que for fonte de paradoxos.[33]

Por outro lado, o método intuitivo surge como alternativa na medida em que ele apela para uma maior clareza nas nossas definições básicas dos conceitos envolvidos. Nesse sentido, nossos axiomas são escolhidos, não estritamente para espelhar uma realidade anterior a eles, mas como consequência das nossas definições básicas. Portanto, se compatíveis com as definições, os axiomas devem ser encarados como verdadeiros independentemente de suas consequências. Obviamente, essa independência das consequências só encontraria restrições no caso de consequências contraditórias; o que contaria como uma evidência de que há algo de errado com nossas definições e/ou axiomas. A confiança na verdade dos axiomas e, consequentemente, em sua consistência, provém da clareza da definição dos conceitos básicos e da compatibilidade dos axiomas com essas definições.

Já no que diz respeito à abordagem construtivista da nossa concepção de conjunto, é retomado o princípio básico de que uma coleção de objetos depende inteiramente dos elementos que a compõem. Isso confere não só um critério de identidade como ele é estabelecido pelo axioma da extensionalidade, mas também um critério de existência. É digno de nota que, embora apresentada aqui em um contexto construtivista, essa concepção de existência de conjuntos é compatível com a definição de dependência ontológica presente na *Metafísica* (1019a 1-4) de Aristóteles. De acordo com Aristóteles, uma entidade *a* é posterior a uma entidade *b* – em termos contemporâneos falamos de *a* como ontologicamente dependente

[33] Para não perder o foco na questão central do meu trabalho, não constitui meu objetivo aqui avaliar criticamente os métodos destacados por Potter, mas apenas tornar evidente os aspectos metafísicos que os orientam. O caráter pragmático da escolha dos axiomas foi destacado por Weyl (1949; p. 231). Já a pressuposição da realidade anterior dos conjuntos e o modo como ela orienta a escolha dos axiomas é alvo do comentário de Zermelo (1908: p.261).

de *b* – quando a existência de *a* não é possível independentemente de *b*. Nesse sentido, de um ponto de vista construtivista, os conjuntos são ontologicamente dependentes de seus membros, na medida em que a existência de um conjunto não é possível sem a existência de seus membros. De maneira direta, isso quer dizer que só existe uma coleção de objetos se existem os membros da coleção em questão, ou ainda, que a construção de um conjunto pressupõe ou a construção ou a demonstração da existência prévia de seus membros. Embora essa afirmação possa ser entendida com um truísmo, no contexto de uma visão construtivista da teoria dos conjuntos, ela resulta em interessantes *insights*. Em primeiro lugar, Potter (2004: p. 37) chama atenção para o fato de que, na teoria axiomática de conjuntos, a relação de dependência entre diferentes conjuntos – e também entre conjuntos e seus membros – é entendida numa abordagem construtivista como sendo transitiva e irreflexiva. Se a construção de um objeto A pressupõe um objeto B, e a construção de B pressupõe um objeto C, então a construção de A pressupõe C. Além disso, o caráter irreflexivo expressa a intuição básica de que nenhum objeto pode ser pressuposto em sua própria construção. Esses princípios tomados conjuntamente são parte do espírito básico que proíbe conjuntos definidos reflexivamente, a exemplo do conjunto de Russell, bem como põe o fundamento da nossa visão hierárquica e cumulativa das operações sobre conjuntos. Em resumo, a abordagem construtivista é pura harmonia com a concepção iterativa de conjunto.

É também comum tratar a relação de dependência ontológica que permeia a noção de construção como uma relação bem-fundada, ou seja, uma relação que deva ser explanada em um número finito de passos. Nesse sentido, a estrutura de qualquer entidade complexa é passível de explanação a partir de uma análise conjunta da estrutura de todos itens que a compõe. Tomando o objeto de interesse primário para a quantificação irrestrita, pode-se dizer que o processo de construção de um conjunto deve ser descrito a partir da explanação da cadeia de construção de cada um de seus membros. Obviamente, isso também estabelece um forte obstáculo para a admissão de um conjunto absoluto na medida em que a concepção iterativa descreve o processo de construção como infinitamente aberto e esse mesmo conjunto absoluto pretende figurar como a totalidade que compreenda ou abranja todo esse infinito processo. Sobre essa afirmação, a seguinte passagem é especialmente elucidativa:

> [...] no set can lie at the head of an infinite descending $\in$-chain. Nor is it a point about what we can construct or imagine, even in an idealized sense. The point is rather that any conceptual scheme which genuinely represents a world cannot contain infinite backwards chains of meaning, and so collections which mirror such chains could only be idle wheels in such a scheme. (Potter, 2004: p. 40)

Ao explanar o processo de construção, o desafio básico que essa relação de dependência de conjuntos com relação aos seus membros impõe ao construtivista é pensá-la no contexto de uma teoria pura dos conjuntos. Em tal teoria, temos apenas o conjunto vazio como ponto de partida e todos os outros conjuntos são construídos a partir deste conjunto inicial. Obviamente, em tal caso a existência dos conjuntos está subordinada a uma justificativa construtivista do conjunto vazio que, por definição, não possui membro algum. Se conjuntos são construídos essencialmente numa relação de dependência com seus membros, como construir um conjunto que não tem membro algum? Esse é o desafio construtivista. Duas saídas possíveis seriam: (i) assumir um conjunto vazio como um *urelement*; o que soaria *ad hoc* em um contexto construtivista; (ii) introduzir o conjunto vazio por intermédio de uma propriedade universalmente não instanciada; o que parece implicar na importação de uma característica plantonista para o construtivismo, a saber, o uso de intesões. Nesse contexto, o platonista parece oferecer uma resposta mais direta ao problema do que a dada pelo construtivista quando assume a existência independente do conjunto vazio. Do ponto de vista do platonismo, a credibilidade do conjunto vazio é afirmada na ideia de que conjuntos são entidades abstratas cuja existência dispensa a existência de qualquer outra entidade.

3.4.2. A relação entre quantificação irrestrita e o discurso metafísico

Além de destacar os pressupostos metafísicos do debate sobre a quantificação irrestrita, há ainda um outro modo de olhar a relação entre tais quantificações e a metafísica, a saber, a que tenta discutir a necessidade ou não de quantificações irrestritas para regimentar o discurso metafísico. Um modo de "salvar" o tratamento formal da metafísica das objeções lógicas surgidas no seio da semântica padrão dos quantificadores é mostrar que o discurso metafísico independe das quantificações tais como elas são compreendidas na semântica em questão. McGee (2006) e Lavine (2006) possuem duas destacáveis abordagens da quantificação irrestrita que, embora opostas entre si, produzem consequências metafísicas dignas de serem discutidas. Enquanto McGee propõe uma abordagem alternativa com relação à semântica padrão segundo a qual quantificações irrestritas são possíveis, Lavine sustenta que quantificações irrestritas não são necessárias ao discurso metafísico. Pretendo apresentar agora essas duas abordagens em seus traços gerais, na medida em que elas são relevantes para ilustrar alguns dos diversos modos como os proponentes da quantificação irrestrita e os metafísicos tentaram superar os impasses gerados a partir das limitações da semântica padrão dos quantificadores.

Lavine faz um convite a abandonar a abordagem quantificacional do termo “tudo” dos metafísicos em favor de uma abordagem que ele chama de *esquemática*. Por “termo ‘tudo’ dos metafísicos” devemos entender o uso que é feito desse termo em sentenças metafísicas lidas como princípios universalmente irrestritos. Mas o que significa uma abordagem esquemática do termo “tudo”? De acordo com Lavine, isso significa que podemos substituir sentenças gerais por sentenças contendo expressões esquemáticas ou simplesmente *esquemas*. Por exemplo, o princípio aristotélico da auto-identidade:

(I) Tudo é auto idêntico

pode ser expresso em um esquema do tipo

(I)* S = S

onde “S” opera como uma variável esquemática que admite *qualquer* instância substitucional imaginável. Ao contrário do que foi estabelecido pela semântica padrão, essas instâncias substitucionais são expressões da nossa linguagem e não itens de um domínio absoluto e extralinguisticamente estabelecido. Portanto, a abordagem de Lavine põe a linguagem em evidência. O problema da quantificação irrestrita é solucionável em termos estabelecidos internamente à filosofia da linguagem.

Uma primeira objeção que pode ser rapidamente levantada contra os esquemas de Lavine é a de que eles escamoteiam o problema da quantificação irrestrita na medida em que Lavine usa os esquemas para mascarar a quantificação irrestrita. Quando se diz, por exemplo, que a variável S introduzida em (I)* admite *qualquer* instância substitucional, o que de fato estamos realizando é uma afirmação irrestrita expressa no termo "qualquer" e entendida nos mesmos moldes da semântica padrão dos quantificadores. Essa objeção parece digna de nota uma vez que, factualmente, usamos em linguagem natural expressões como "todo" e "qualquer" como sinônimos em um número relevante de contextos.

Não obstante, a despeito de toda a carga de semelhança que os usos dos termos "todo" e "qualquer" possuem na linguagem natural, Lavine defende que, em sua abordagem esquemática de sentenças gerais, esses termos significam coisas distintas. O termo "todo" seria usado para expressar uma generalidade quantificacional, ao passo que "qualquer" expressaria uma generalidade esquemática que Lavine considera aberta (*open-ended generality*). Por exemplo, no entendimento de Lavine, em (I)* a variável esquemática S não possui um domínio associado a ela ou mesmo uma classe fechada de substituição. A quantidade de instâncias de substituição alegadas pelo proponente da abordagem esquemáticas cresce na medida em que a própria linguagem se expande de forma dinâmica através da inclusão de novas expressões.

No entanto, apesar de incorporar o caráter dinâmico das linguagens naturais – o que é certamente um aspecto positivo da proposta de Lavine –, em sua motivação, a distinção entre "tudo" e "qualquer" parece dotada de um forte caráter *ad hoc*. Ela parece requerer uma fundamentação independente das limitações que a abordagem quantificacional possui, mas tal fundamentação não é oferecida satisfatoriamente por Lavine. Qual seria a diferença relevante em dizer que aceitar a validade de um determinado esquema é aceitar não a satisfação de "todas suas instâncias", mas de "quaisquer de suas instâncias"? Essa é uma questão sem resposta substancial nos quadros da abordagem esquemática que Lavine propõe. Penso que dificilmente uma solução relevante possa ser dada a esse impasse.

Um último aspecto da proposta de Lavine é ainda digno de nota. Embora Lavine não afirme nada explicitamente sobre a disputa entre uma interpretação objetual ou substitucional dos quantificadores, dada a defesa que ele promove de sentenças esquemáticas, sua abordagem está evidentemente muito mais próxima de uma interpretação de caráter substitucional. O que Lavine parece fazer é parafrasear quantificações universais em sentenças esquemáticas apelando para uma interpretação substitucional do quantificador universal.

Com base no exposto acima, passa a ser transparente a tese de Lavine da dispensabilidade da quantificação irrestrita para a formalização do discurso metafísico. Caso a proposta de Lavine fosse plenamente satisfatória, as afirmações absolutamente gerais feitas pelos metafísicos poderiam ser parafraseadas em sentenças esquemáticas dispensando o uso de quantificadores.

Ao contrário de Lavine, McGee (2006) mantém o objetivo de interpretar sentenças universalmente irrestritas nos moldes da abordagem quantificacional. Retomando algumas teses apresentadas anteriormente, de acordo com McGee (2000), tal abordagem está fundada em três princípios: (i) em um contexto dedutivo, são as regras de inferência que determinam o significado dos quantificadores; (ii) as regras de inferência são abertas com respeito à quantificação; (iii) nós trabalhamos em sistemas formais assumindo o pressuposto de que tudo o que existe é nomeável. Vejamos em mais detalhes no que consiste cada um desses princípios.

Em (i) McGee expressa um caso particular de sua compreensão geral da semântica de termos lógicos. Para ele, em linguagens formais, os termos lógicos adquirem significado por intermédio das regras de inferência que os regem. No caso específico dos quantificadores, como afirmado em (ii), essas regras são abertas na medida em que se aplicam a tudo aquilo no domínio que possa ser nomeado e que esse processo admite sempre o acréscimo de novas instâncias. Para uma melhor compreensão desse segundo princípio podemos tomar um caso paradigmático. McGee (2000: p. 68) usa o exemplo da regra de eliminação do quantificador universal que introduzi no primeiro capítulo:

$$\frac{\forall x \varphi x}{\varphi a}$$

Essa regra nos diz que, a partir de uma sentença quantificada universalmente $\forall x \varphi x$, podemos inferir uma sentença φa, onde a é um parâmetro individual para um objeto do domínio tomado arbitrariamente e φ é uma propriedade cuja sentença universalmente quantificada afirma que ela é satisfeita para todo objeto do domínio em questão.

Já a afirmação da abertura de nossas regras formais para a quantificação expressa em (ii), quando aplicada à luz da regra de eliminação do quantificador universal, indica que, em princípio, não há um limite para a quantidade de instâncias φa da regra. É o domínio da quantificação que determinará a quantidade de instâncias possíveis. Obviamente, possuindo esse caráter estruturalmente aberto, a regra de inferência tomada isoladamente deixa espaço para uma quantificação irrestrita. Caso esse tipo de quantificação seja ilegítima, ela o será por razões externas à própria regra que estabelece o sentido da quantificação.

Curiosamente, embora a quantificação restrita seja tomada como ponto pacífico quanto a questões de legitimidade – como destaquei no capítulo 2 –, ela não escapa ilesa de suspeitas na abordagem de McGee. Isso ocorre pois McGee argumenta que objeções similares àquelas levantadas contra a quantificação irrestritas podem ser reproduzidas para as versões restritas. Para que sejam legítimas quantificações restritas, precisamos estabelecer alguma limitação às regras de inferências da quantificação; essa limitação possui igualmente um caráter externo às próprias regras: limitações pragmáticas, sortais, etc. Sendo assim, nos termos de McGee, tanto para deslegitimar a quantificação irrestrita quanto para legitimar a quantificação restrita precisamos de elementos externos à semântica dos quantificadores que interfiram no modo como usamos as regras de inferência para esses termos lógicos em questão.

Por fim, dado que (iii) sustenta explicitamente que tudo é nomeável, segue-se que os quantificadores podem percorrer tudo o que existe. Como McGee (2000: p. 69) destaca, a ideia de que quantificadores podem percorrer tudo o que existe vale não só quando o contexto em questão é dotado de alguma restrição, mas também quando não há restrição alguma agindo sobre o discurso. Da forma como vejo, esse terceiro princípio parece fortemente objetável dado que alguns sistemas formais pretendem quantificar sobre domínio de cardinalidade infinita não enumerável que, estruturalmente, impõem limites à nossa capacidade de lidar com objetos de forma nomeável. Um exemplo bastante destacável de um tal domínio é o dos números reais. No entanto, seguirei o argumento ignorando momentaneamente essa complicação com o objetivo de analisar a abordagem de McGee em todas suas consequências.

Diferentemente de Lavine, McGee sustenta uma interpretação objetual para essas instâncias produzidas por meio da aplicação das regras de eliminação da quantificação universal. Em linhas gerais, o que McGee propõe é que o próprio entendimento das regras de inferência que regem quantificações parece apontar para uma aplicação irrestrita das mesmas. Se McGee estiver correto, sua abordagem do problema se configura como uma defesa da quantificação irrestrita via semântica dos termos lógicos. No entanto, penso que McGee falha em mostrar como a interpretação das regras de inferência pode realmente dispensar o cenário estabelecido pela semântica padrão dos quantificadores, bem como os obstáculos que tal semântica enfrenta quanto à quantificação irrestrita. Reformulando em termos ainda mais fortes, penso que a abordagem de McGee em nenhum momento se mostra de fato independente da semântica padrão dos quantificadores. Com isso, ela não resolve efetivamente os obstáculos que a semântica padrão impõe. Para ser bem sucedido em provar essa independência, McGee precisaria mostrar como restrições – ou a ausência delas – a totalidades podem ser pensadas como independentes da noção de *restrição sobre um domínio*, pois na defesa de McGee a noção de domínio parece ainda claramente embutida na explicitação da semântica estabelecida pelas regras de inferência.

De certo modo, a defesa de McGee parece não provar a legitimidade de uma generalidade absoluta associada a quantificações irrestritas, mas pressupô-la para explicar o caráter de abertura das regras de inferência para a quantificação. Sobre isso escreve Dieveney:

> [...] McGee does not intend his account to convince sceptics of E-quantification [Unrestricted Quantification]. In fact, his account cannot convince the sceptic since it requires the substantive background assumption that there is a well-defined domain of absolutely everything. This assumption would only be acceptable to people who already accept the meaningfulness of quantification over absolutely everything. (Dieveney, 2014: p. 301)

Nesse mesmo artigo publicado recentemente, Dieveney (2014) defendeu que nem a defesa proposta por McGee nem a abordagem esquemática de Lavine são suficientemente ricas para satisfazer os objetivos de uma teoria metafísica. Nesse sentido, ele propõe uma superação de ambas as propostas em favor de uma que seja metafisicamente sustentável. Dieveney chama sua proposta de *quantificação genuinamente irrestrita*. Analisemos a proposta de Dieveney em seus traços gerais, bem como suas críticas a algumas das teses apresentadas acima.

Contra Lavine, a principal linha de objeção diz respeito à dúvida sobre a capacidade da abordagem esquemática de funcionar como meio de tradução das sentenças metafísicas. Seguindo essa linha de discussão, Dieveney (2014: p. 296) afirma que a abordagem esquemática pode não percorrer todas as instâncias que o metafisico pretende, pois, embora os esquemas de Lavine percorram totalidades abertas, eles são estipulados para operar sempre sob uma totalidade de itens nomeados. Para que a abordagem esquemática afirme o mesmo que o metafísico pretende dizer, por exemplo, com o princípio de auto-identidade, ela parece necessitar que todos os objetos possuam expressões que os nomeiem. No entanto, é bastante intuitivo sustentar a existência de objetos não nomeados para os quais a abordagem quantificacional do princípio de auto-identidade seja válida, mas que a abordagem esquemática deixe escapar em seu âmbito de discurso.

Alguém poderia alegar que tais objetos não nomeados são contemplados pelo esquema na medida em que vão sendo descobertos e nomeados; e isso parece previsto pelo caráter dinâmico e expansivo dos esquemas. No entanto, um metafísico de linhagem platonista que entende o princípio de auto-identidade não só como universalmente verdadeiro, mas também como uma verdade sobre uma totalidade completa, independente ontologicamente e atual, dificilmente estaria em postura de concordância com o caráter dinâmico dos esquemas que parecem percorrer em cada momento apenas uma totalidade acessível epistemicamente e linguisticamente nomeada. Nem é preciso muito para verificar que uma totalidade com tais características está distante da maioria das teorias metafísicas estabelecidas.

Outro ponto de destaque é que, do modo como os metafísicos pensam os princípios por eles enunciados, tais princípios possuem valores de verdade bem definidos; eles devem sempre ser ou verdadeiros ou falsos. No entanto, um esquema não é uma sentença do tipo que possa ser dita verdadeira ou falsa. Um esquema é muito mais um modo de proceder – ele nos diz como devemos construir algo – e pode ser entendido como adequado ou não, mas não como verdadeiro ou falso. Por exemplo, (I)* nos diz que em toda substituição de S por uma expressão na linguagem resulta em uma sentença de identidade verdadeira. Desse modo, assumindo "A estrela da manhã" como o valor de S temos a instância verdadeira do princípio de auto-identidade "A estrela da manhã é a estrela da manhã". Contudo, a expressão "S = S", lida enquanto um esquema de substituição, não é propriamente algo que possa ser compreendida como ou verdadeira ou falsa. Tomando de empréstimo a terminologia de Wittgenstein, podemos afirmar que o esquema do princípio de auto-identidade proposto por Lavine não diz “o que é o caso no mundo”; no máximo se mostra enquanto forma lógica deste.

Uma possível forma de superar a objeção quanto à ausência de valores de verdade consiste em levantar o argumento de que, embora o esquema ele próprio não seja passível de atribuição de verdade ou falsidade, ao defendermos sua adequação estamos igualmente nos comprometendo com a verdade de todas as suas instâncias. Em princípio, seria esse comprometimento que comportaria a afirmação do metafísico e sua pretensão de verdade. Não obstante, na abordagem esquemática de Lavine, não é cada uma das instâncias ou uma grande conjunção da totalidade delas que conta como a tradução da verdade universal metafísica, mas o próprio esquema em questão. Esse modo de entender a estratégia da paráfrase de Lavine parece claramente um obstáculo à formulação de verdades metafísicas enquanto sentenças esquemáticas.

Dieveney (2014: p. 297) sustenta ainda que o que nos faz recusar esquemas como expressando princípios metafísicos não é o desafio linguístico de achar ou não uma expressão que, substituindo as variáveis do esquema, resulte em uma sentença falsa. Acreditar nisso seria aceitar um idealismo de caráter linguístico; uma mera direção de ajuste mundo-linguagem. Essa sentença falsa produzida pela substituição só pode ser entendida como falsa pela ausência de correspondência com um fato no mundo. O que nos faz recusar esquemas é verificar a própria constituição do mundo e nossas melhores teorias para explanar essa constituição e, de algum modo, observar que ela não é compatível com o esquema em questão. Nesse sentido, nossa recusa de esquemas está fundada, em última instância, em um aspecto fortemente objetual do termo “tudo” presente nas quantificações irrestritas. Temos aqui, portanto, a ontologia pondo novamente sua força de encontro à linguagem.

Como dito anteriormente, a partir da crítica aos trabalhos de McGee e Lavine, Dieveney propõe aquilo que ele chama de uma *quantificação genuinamente irrestrita* e que teria o benefício de permitir a formalização do discurso metafísico, além de ser neutra quanto aos diferentes graus de comprometimento ontológico. Para isso, ele afirma romper com a posição quineana de que o uso dos quantificadores possui um importe existencial e segue Parsons (1980) ao abandonar a distinção entre quantificadores “universal” e "existencial" em favor da terminologia mais neutra que trata os quantificadores como "universal" ou "particular".

Dito de uma maneira direta, Dieveney sustenta que o entendimento do sentido e o âmbito percorrido pela expressão "tudo", quando usada em um discurso metafísico, não pode ser apreendido como um problema puramente lógico e tratado internamente a um sistema formal. Tal entendimento constitui um problema que envolve aspectos fundamentalmente de decisões ontológicas não determinadas puramente pelo sistema formal onde está sendo expressa a sentença universal em questão. Nesse sentido, Dieveney pensa que um dos benefícios de sua proposta é separar o que são problemas lógicos do que são problemas metafísicos quanto à quantificação irrestrita.

Ao que parece, embora Dieveney tenha construído sua proposta enquanto uma crítica aos trabalhos de McGee e Lavine, ele parece ter mantido, de cada um destes trabalho, um aspecto fundamental: de McGee ele manteve a tentativa de descrever o comportamento dos quantificadores em nosso discurso metafísico com base na compreensão da semântica de termos lógicos a partir das regras de inferência. Isso fica claro em sua defesa de que, dados os benefícios que ela comporta, a compreensão genuinamente irrestrita dos quantificadores é a mais indicada ao metafísico. Já, seguindo passos análogos ao de Lavine, Dieveney parece apontar na direção de que, embora seja a mais indicada, sua compreensão genuinamente irrestrita dos quantificadores não é, em última instância, necessária ao trabalho do metafísico. Essa postura parece resumir-se nos seguintes termos: se pretendemos dar um tratamento formal para nossas afirmações absolutamente gerais, então o tratamento quantificacional é sem dúvida alguma o mais adequado. No entanto, embora seja tal tratamento o mais adequado do ponto vista de formal, a credibilidade do discurso metafísico não é refém da formalização; seja ela de que tipo for.

Seguindo a abordagem de McGee em seus aspectos fundamentais, ao falar de uma quantificação genuinamente irrestrita, Dieveney pretende expressar o fato de que as regras de inferência para quantificadores apontam fundamentalmente para um comportamento irrestrito das quantificações. Em outras palavras, dadas as regras de introdução e eliminação que estabelecem o uso dos quantificadores dentro da lógica clássica e seu caráter aberto destacado por McGee, quantificadores são, em seu fundamento semântico, genuinamente irrestritos.

Nesse contexto, Dieveney concorda com McGee ao afirmar que parece haver uma subversão do *establishment* da literatura sobre quantificações irrestritas e restritas. Ao contrário do que é costumeiramente posto, Dieveney assume que o verdadeiro desafio não seria justificar a legitimidade de quantificações irrestritas, mas provar como quantificações restritas são possíveis, visto que possuímos regras de inferência de caráter irrestrito para quantificações. Essa ideia de que, enquanto produto das próprias regras de inferência, os quantificadores são entendidos como irrestritos é o que Dieveney chama de *quantificação genuinamente irrestrita*. É importante destacar que a abordagem de Dieveney não é incompatível com a quantificação restrita, mas ela demanda uma justificativa externa para tal restrição, uma vez que a restrição de quantificadores não é derivada da nossa compreensão semântica desses termos lógicos via regras de introdução e eliminação. Para Dieveney, a restrição de domínio é o verdadeiro problema a ser enfrentado.

Dada a convergência entre as propostas de McGee e Dieveney, surge aqui um problema de relevo. Para obter sucesso onde McGee parece falhar, Dieveney precisa mostrar como a abordagem via semântica dos quantificadores defendida por ele dispensa a noção de domínio enquanto conjunto nos moldes de ZFC, que impõe obstáculos à quantificação irrestrita e, consequentemente, ao tratamento quantificacional do discurso metafísico. Caso Dieveney não supere esse desafio, sua proposta não difere em significativo aspecto daquela apresentada por McGee. A questão a ser enfrentada é: o que a quantificação genuinamente irrestrita requer para constituir uma resposta satisfatória aos problemas que Dieveney pretende solucionar? O próprio Dieveney tenta responder a essa questão na medida em que enfrenta algumas das principais críticas à sua abordagem.

Em primeiro lugar, é importante destacar que a abordagem genuinamente irrestrita dos quantificadores não é uma contribuição original de Dieveney e nem mesmo é uma abordagem recente do problema. De acordo com Luschei (1962, pp. 111-18), podemos encontrar algo na mesma direção já em Lesniewski.[34] No entanto, em nenhuma investigação séria de um problema a não originalidade configura uma objeção relevante contra a correção de um argumento. É preciso

[34] Uma defesa do entendimento dos quantificadores como genuinamente irrestritos pode ser igualmente encontrada em Lejewski (1954). Nessa obra, Lejewski também defende a influência de Lesniewski como um precursor desse modo de compreender os quantificadores.

algo que revele uma inconsistência ou uma séria desvantagem da abordagem em questão. Seguindo essa última estratégia, uma linha mais razoável de objeção à proposta de Dieveney consiste em confrontar a quantificação genuinamente irrestrita com as chamadas lógicas livres e tentar mostrar que as diferenças entre elas parecem sugerir que a quantificação genuinamente irrestrita conduz a um meinongianismo. Vejamos como isso se dá.

Tomemos a relação entre a abordagem dos quantificadores como genuinamente irrestritos e a lógica livre. De acordo com Dieveney (2014: p. 306), em ambos os casos, de um ponto de vista estritamente sintático, termos como “Pégaso”, “Hércules” e “Sherlock Holmes” podem legitimamente constar como instâncias de esquemas de substituições. Não obstante, há diferenças semânticas significativas entre a abordagem genuinamente irrestrita da quantificação e a lógica livre. Enquanto os proponentes da quantificação genuinamente irrestrita aceitam as clássicas regras de inferência para quantificadores e toda sua carga de comprometimento ontológico, os lógicos livres rejeitam as regras de eliminação do quantificador universal e a chamada generalização existencial. Em outras palavras, do ponto de vista da lógica livre, não se pode inferir uma sentença φa da quantificação $\forall x \varphi x$. Isso ocorre, pois é admissível aceitar a verdade da sentença universalmente quantificada $\forall x \exists y(x = y)$ sem com isso ser obrigado a aceitar que $\exists y$(Pégaso = y). Uma explicação para essa rejeição das regras acima mencionadas deve-se a própria razão de ser da lógica livre. Ao contrário do modo de operar da lógica clássica, na lógica livre o uso de um parâmetro individual não possui um importe metafísico. Ao utilizar um parâmetro individual qualquer eu não estou dizendo com isso que há um referente para tal parâmetro. Já na abordagem genuinamente irrestrita dos quantificadores, fortemente fundada nos padrões clássicos, esse comprometimento ontológico com um referente para cada parâmetro e constante individual presente nas sentenças formalizadas está certamente presente.

É precisamente esse modo como a abordagem genuinamente irrestrita opera com o comprometimento ontológico das sentenças quantificadas que motivou a crítica acima mencionada de que tal abordagem conduz a um meinongianismo. Pois, aceitando a passagem que leva $\forall x \exists y(x = y)$ à $\exists y$(Pégaso = y), ou seja, o proponente de tal abordagem se comprometeria com a existência de *possibilia*. Dieveney defende que essa é uma má compreensão de sua abordagem, uma vez que ele a propõe com a finalidade de neutralidade ontológica. Com isso, ela não deveria implicar inevitavelmente uma posição ontológica específica. De acordo com Dieveney (2014: p. 307), um modo de evitar que a defesa de uma concepção genuinamente irrestrita dos quantificadores conduza a um indesejado meinongianismo é sustentar, conjuntamente, para esses mesmos quantificadores, uma interpretação substitucional como a defendida por Geach (1980) e Lavine (2000). Além disso, teríamos de admitir que termos que não denotam possam ser legitimamente usados em instâncias de substituição.[35] No entanto, penso que a proposta de Dieveney de salvar sua abordagem do meinongianismo falha na medida em que ela evita o comprometimento ontológico com objetos não existentes, mas, consequentemente, precisa admitir uma nova teoria da verdade que explane a verdade de sentenças onde os termos que não denotam ocorrem, tal como em $\exists y$(Pégaso = y). Da forma como penso, admitir uma teoria alternativa da verdade que comporte a verdade de $\exists y$(Pégaso = y), por si só, parece um preço alto para o objetivo de salvar quantificações irrestritas.

Uma outra estratégia indicada por Dieveney (2014: p. 307) seria proibir a expansão dos termos da nossa linguagem; o que impediria também a introdução de termos sem referência. Além disso, Dieveney defende claramente que tal estratégia oferece um meio de compreensão do modo como produzimos quantificações restritas a despeito do caráter irrestrito das regras de inferência para quantificadores na lógica clássica.

> [...] This account asserts that our understanding of the quantifiers themselves (provided by the introduction and elimination rules that define them) supplies no restrictions on their range. Instead, such restrictions come in the form of restrictions on acceptable expansions to the languages of the theories in which they occur. Notice that it is entirely consistent with this view that one also insist that quantification in meaningful discourse must always be restricted to ranging over existent objects in some less than all inclusive domain. One need only accept that these restrictions come not from our understanding of the quantifiers themselves, but from restrictions on acceptable expansions to the languages of the theories in which they occur. (Dieveney, 2014: 309)

[35] O uso de termos não referenciais em instâncias de substituição foi defendida por Lejewski (1954) e Marcus (1962).

Não obstante, penso que essa é uma estratégia ainda mais estranha, especialmente quando aplicada às linguagens naturais, pois, caso posta em prática, amputa de tais linguagens algo que parece ser uma de suas grandes virtudes, a saber, seu caráter dinâmico e socialmente construtivo. Um problema semelhante surgiria se deliberadamente restringíssemos nossas afirmações e teorias de modo a admitir apenas termos para os quais pudéssemos garantir ser dotados de referência, excluindo os termos vácuos já presentes na linguagem. Nesse caso, por exemplo, seria extremamente empobrecedor fazer literatura sem poder lançar mão de nomes para entidades ficcionais.

De minha parte, penso que quantificações irrestritas são imprescindíveis para o tratamento formal do discurso metafísico, embora Lavine, McGee e Dieveney não sejam realmente bem-sucedidos em reabilitar o discurso sobre a generalidade absoluta. Alguns filósofos podem até argumentar em favor da ideia de que o discurso metafísico pode sobreviver mesmo diante da indisponibilidade de um tratamento formal consistente. Acho essa forma de entender o problema particularmente equivocada. Me parece razoável assumir que, se não há internamente aos sistemas formais disponíveis a nós um tratamento consistente de quantificações irrestritas, então deve haver algo de muito errado nas nossas pretensões metafísicas ou alguma limitação fundamental nos sistemas formais. Tais limitações nos saltam aos olhos quando usamos a semântica padrão para objetivos que nos são caros. Dito de uma maneira direta, minha aposta é na limitação dos nossos sistemas formais usuais; e por "usuais" entende-se aqui "clássicos".

Quero agora avançar em direção a outro ponto que penso ser bastante revelador sobre as críticas lógicas contra as quantificações irrestritas, a saber, a relação entre a extensibilidade indefinida e os argumentos por regresso ao infinito. Essa relação parece destacável dado que, na mesma medida em que argumentos que conduzem a regressos ao infinito são entendidos como provas de que há algo de errado com as premissas do argumento em questão, a extensibilidade indefinida é também comumente tomada como um fator que inviabiliza as quantificações sobre domínio absolutamente inclusivos. Se eu estiver certo quanto ao modo de entender a relação entre esses dois tópicos, então podemos revelar interessantes características do problema da quantificação irrestrita ou, na mais modesta das hipóteses, oferecer um novo olhar para ele.

3.5 A extensibilidade indefinida como um progresso infinito

A história das descobertas científicas e filosóficas é marcada por avanços promovidos através de *insights* pontuais que ajudaram a mudar o modo como enfrentamos determinados problemas. Muitas vezes, essa mudança no olhar ocorre por meio do estabelecimento de uma conexão, até então não percebida, entre um problema de interesse e outros problemas já exaustivamente estudados. Da forma como penso, uma estratégia semelhante poderia ser explorada com relação à quantificação irrestrita e a generalidade absoluta. Com vista a esclarecer a natureza dos conceitos indefinidamente extensíveis – fundamentais para o problema da quantificação irrestrita –, pretendo defender a tese que afirma uma estreita correlação entre os tópicos da extensibilidade indefinida de conceitos e do regresso ao infinito. Penso que essa correlação não foi explorada ainda o suficiente e que ela pode oferecer uma abordagem inspiradora da questão.

Argumentos por regresso ao infinito são frequentemente usados ao longo da história da filosofia e em contextos bastante distintos tais como, na prova de que não pode haver uma série infinita da relação de causalidade, na refutação de determinadas teorias da justificação, dentre outros. Como costumeiramente a questão é posta no pensamento ocidental, o regresso ao infinito é algo indesejado, pois parece conferir irracionalidade às nossas teorias. Obviamente, uma teoria ou uma explanação de um problema que possua infinitos passos não é nem uma boa teoria nem uma boa explanação. Em verdade, elas nem mesmo são factualmente uma teoria ou uma explanação, dado que elas não possuem um corpo finito ou uma etapa explanatória final para nenhuma das questões que elas se propõem resolver. Um homem casado sabe muito bem que, ao chegar em casa de manhã cedo após uma bebedeira com os amigos, ele deve possuir uma boa e finita explicação para todas as perguntas da esposa. Uma pergunta com uma resposta infinita jamais constituiria uma boa saída para o marido encrencado. De maneira geral, a ideia por trás desse tipo de raciocínio é que a rejeição de regressos infinitos deve ser algo desejável não só por maridos boêmios como também por cientistas e filósofos.

Antes de entrarmos de maneira mais técnica na estrutura dos argumentos envolvendo regressos infinitos, vale ilustrar o ponto com um caso menos complexo. Tomemos como exemplo o argumento de Demócrito em favor da teoria corpuscular da matéria que está, em última instância, baseada na existência de átomos fundamentais e de seus agregados. Há um princípio mais geral que constitui o ponto de partida do argumento, a saber, de que a realidade material é um todo complexo e divisível: *tudo que é material é divisível*. Ao tentar explanar o fenômeno da divisão da matéria, Demócrito sustentou que essa divisão deve findar em partículas elementares – os átomos –, uma vez que a hipótese alternativa seria assumir a análise da matéria como um processo infinito. O problema de assumir que a matéria pode ser infinitamente divisível é que, nesse caso, uma teoria que buscasse explicar a estrutura última da realidade material – uma explanação analítica de tudo o que existe – envolveria infinitos passos e, portanto, uma teoria sobre a totalidade da realidade seria estruturalmente impossível. Para os antigos gregos, isso equivale a afirmar que não haveria uma razão última na realidade. Nesse contexto, a ideia básica é que, se a admissão de um determinado conjunto de premissas leva a um regresso ao infinito, então devemos barrar esse regresso de algum modo: por exemplo, por meio de uma tese adicional que estabeleça um limite final nos passos da análise; como ocorre na tese de Demócrito da existência de átomos. Por trás dessa postura encontra-se a crença de que regressos infinitos comportam irracionalidade.

Uma postura clássica contra o regresso ao infinito é o chamado fundacionismo que, em sua roupagem matemática, constitui o núcleo básico de nossas teorias axiomáticas. Desde Euclides, uma maneira alternativa e bastante confiável de lidar com uma explanação envolvendo passos infinitos em sistemas formais é fazendo uso do princípio de indução matemática. De fato, em sistemas formais, onde os termos básicos são introduzidos por definição, os objetos elementares são descritos ou construídos por apelo a esses termos e, portanto, possuem um comportamento padrão. Nesse contexto, esse recurso funciona com grande sucesso. No entanto, quando aplicada à justificação de teorias sobre a realidade empírica com seus objetos existindo anterior e independentemente de nossas afirmações sobre eles, essa estratégia falha fragorosamente. Além disso, o problema de aplicação da indução em contextos empíricos abriria espaço para uma posterior necessidade de justificação da própria indução aplicada nesse contexto. Em situações envolvendo conteúdo empírico, a justificação da indução resultaria em um círculo vicioso, pois tal justificação de credibilidade de inferências indutivas já pressupõem de algum modo a própria indução.

Embora seja de grande relevância lógica e filosófica, não constitui meu interesse primário aqui uma discussão sobre processos não viciosos envolvendo infinitos passos; tal como aquele que é possibilitado pelo princípio da indução na matemática. Meu objetivo é, antes, apresentar a estrutura geral de um regresso infinito vicioso e discutir o que penso ser algumas importantes correlações entre essa estrutura e o problema da generalidade absoluta. Primeiramente, vejamos de maneira esquemática no que consiste um argumento envolvendo regresso ao infinito.

Gratton (1997: p. 204) chama de *fórmula de regresso* (*regress formula*) uma sentença ou conjunto de sentenças a partir das quais podemos obter um regresso infinito. De acordo com ele, uma fórmula de regresso é constituída basicamente por uma ou mais quantificações universais que podem ser reiteradas vezes instanciadas. Numa tentativa de oferecer a estrutura básica do argumento de Demócrito apresentado acima, alguém poderia propor como fórmulas de regresso o seguinte par de sentenças:

(D1) Tudo que é material é divisível.

(D2) Todo produto de uma divisão material é também material.

Além disso, Demócrito assume o pressuposto de que a realidade é racional e, portanto, uma teoria sobre a realidade – em qualquer que seja o seu nível explanatório – deve ser uma teoria finitamente construída.

Desse modo, seja ω_1 uma determina porção de matéria. Com base em (D1) podemos afirmar que ω_1 deve ser divisível. Assumindo ω_2 e ω_3 como os produtos resultantes da divisão de ω_1 e, com base em (D2), podemos afirmar também que ambos – ω_2 e ω_3 – são porções de matéria. Além disso, novamente com base em (D1) temos que ω_2 e ω_3 são também divisíveis. Neste ponto do argumento, voltamos ao estágio inicial onde as divisões – agora de ω_2 e ω_3 – devem resultar em outras porções de matéria, que, por sua vez, podem também ser divididas *ad infinitum* gerando porções de matérias cada vez mais diminutas. É exatamente esse processo que é exposto na Figura 1 abaixo.

Como anteriormente mencionado, o regresso obtido torna-se inaceitável quando posto diante da tese assumida pelos antigos, incluindo Demócrito, de que a realidade material é racional e que, portanto, deve possuir uma estrutura última e completamente determinada; não uma estrutura aberta e de infinitas peças combinadas. Eu não pretendo fazer aqui uma análise crítica da concepção antiga de racionalidade da realidade natural. Também não é meu objetivo saber até que ponto minha reconstrução do argumento de Demócrito é fiel às afirmações extraídas de seus fragmentos e de sua doxografia. Isso me faria cair em filigranas exegéticas que penso ser infrutíferas para os meus propósitos. Meu compromisso aqui é fundamentalmente com a compreensão do que venha ser um argumento por regresso ao infinito. Para o fim de compreender a estrutura de um argumento por regresso ao infinito, basta ter em mente que o resultado obtido pelo regresso entra em choque com alguma crença previamente assumida. Portanto, uma superação do impasse estabelecido pelo regresso muitas vezes deve ser dada ou pela refutação da crença assumida – no caso, a concepção de racionalidade da realidade material – ou pela rejeição de pelo menos uma das fórmulas de regresso. Essa segunda estratégia foi a usada por Demócrito ao rejeitar a verdade de (D1).

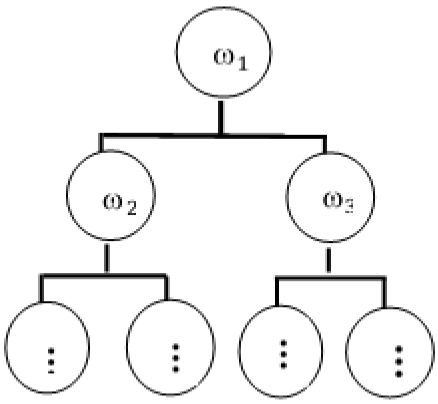

Figura 1 – Um esboço da estrutura do regresso ao infinito de Demócrito

É importante notar que o *modus operandi* de um argumento envolvendo regresso ao infinito mostra que fórmulas de regresso se comportam recursivamente auxiliadas por regras básicas da lógica dedutiva. Em outras palavras, elas operam como fórmulas recursivas na medida em que elas são aplicadas inicialmente a um dado item produzindo um determinado resultado, e então reaplicadas ao resultado em questão produzindo um novo resultado, e assim sucessivamente. Gratton (1997: p. 207) chama cada um desses resultados de *outputs* do regresso infinito. Nesse sentido, fica ainda mais evidente o caráter recursivo da fórmula de regresso na medida em que cada *output n* do regresso é também um posterior *input* que, quando aplicado à fórmula de regresso, produzirá um novo *output n*+1. Dado que a fórmula de regresso é ou uma quantificação universal ou uma conjunção de quantificações universais, o que essas sucessivas aplicações de resultados ou *outputs* no regresso revelam é que há infinitas instâncias de itens que satisfazem os predicados quantificados na fórmula de regresso. O obstáculo que gera tão grande desconforto com relação aos argumentos envolvendo regressos ao infinito é fundamentalmente a impossibilidade de uma explanação final ou de análise de todas essas instâncias dentro do argumento. Em algum momento somos impelidos a abandonar a explanação apelando para alguma expressão tal como "... e assim sucessivamente" ou "... e assim por diante" que deixa o argumento em aberto.

É importante destacar que trabalhos como o de Gratton passam por uma tentativa de oferecer um esquema que explane o comportamento lógico de regressos ao infinito. Nesse sentido, tais trabalhos podem ser agrupados no que podemos chamar de uma teoria geral de regressos ao infinito. No entanto, da forma como são expostas as diferentes instâncias de argumentos desta natureza ao longo da literatura, elas nem sempre espelham fielmente a estrutura sugerida por Gratton. Isso não representa uma objeção forte à proposta de Gratton, uma vez que, mesmo quando não indicadas explicitamente, tais argumentos possuem implicitamente fórmulas de regresso operando recursivamente. Desse modo, uma simples paráfrase das premissas do argumento poderia revelar a estrutura implícita.

Mas afinal o que tudo isso tem a ver com o debate sobre a generalidade absoluta, a quantificação irrestrita e a extensibilidade indefinida de conceitos? Eu pretendo defender aqui uma proposta de compreensão do problema da quantificação irrestrita na abordagem da semântica padrão que o conecta diretamente com argumentos por regresso ao infinito. Se minha proposta estiver correta, podemos derivar dela interessantes características da quantificação irrestrita e novas possibilidades de tratamento do problema.

Dito de maneira grosseira, penso na extensibilidade indefinida de conceitos – a exemplo do conceito de conjunto – como um regresso ao infinito invertido; ou, melhor ainda, posto "de cabeça para baixo". É nesse sentido que a extensibilidade indefinida pode ser entendida como sendo nada mais que um progresso infinito. A vantagem de pensar o problema nesses termos é que fica mais clara a ideia de que, em ambos os casos, há um problema envolvendo nossa capacidade em lidar com totalidades de um tipo específico. Se o incômodo com o regresso ao infinito envolve a impossibilidade de uma *análise* final de argumentos ou da descrição da totalidade da estrutura da realidade, no que diz respeito à extensibilidade indefinida, o incômodo parece ser derivado da impossibilidade de estabelecer uma *síntese* final que possa pôr junto a totalidade de itens que satisfazem conceitos indefinidamente extensíveis. Por essa razão, minha proposta é que o debate que põe junto as noções de extensibilidade indefinida, generalidade absoluta e quantificação irrestrita pode ser melhor compreendido como o problema do *progresso infinito*.

O que pretendo destacar aqui é que, do mesmo modo que a apresentação de um argumento que envolve regresso ao infinito é costumeiramente entendido como uma redução ao absurdo da teoria que produz o regresso, a síntese infinita proporcionada pela concepção iterativa de conjuntos e todos os teoremas e paradoxos que a suportam são tomados como uma redução ao absurdo da generalidade absoluta e, consequentemente, das quantificações irrestritas. Curiosamente, essa analogia entre regressos ao infinito e a quantificação irrestrita se revela também no papel desempenhado pelas quantificações em cada caso. Por um lado, as quantificações entendidas como fórmulas de regressos são tomadas como o ponto de partida do argumento que conduz a uma análise sem fim de instâncias da sentença quantificada. Primeiro temos a quantificação universal, depois produzimos um processo infinito de análise ou explanação de instâncias dessa quantificação. No caso do argumento de Demócrito apresentado anteriormente, esse processo de produção de infinitas instâncias está esquematicamente representado na Figura 1 apresentada junto com o argumento. Por outro lado, a síntese infinita da concepção iterativa de conjuntos que torna ilegítima a ideia de uma totalidade absoluta não nos permite a produção de uma quantificação universal irrestrita. Nesse caso, a quantificação universal não é mais o ponto de partida, mas o suposto ponto final ao qual nós nunca alcançamos, pois entre nós e ele temos uma síntese infinita de itens que, em tese, deveriam satisfazer conjuntamente os predicados quantificados irrestritamente. Temos uma totalidade infinita e em expansão de itens que satisfazem os predicados supostamente quantificados de maneira irrestrita.

Ao que parece, a solução costumeiramente usada para resolver impasses argumentativos envolvendo regressos ao infinito é mais moderada do que a que foi usada pelos primeiros lógicos ao lidar com o progresso infinito associado aos modelos de quantificações irrestritas. No tratamento de regressos ao infinito é comum a rejeição de uma das fórmulas de regresso como estratégia de solução do impasse argumentativo, deixando assim incólume pressupostos mais gerais, tais como as teses ontológicas mais profundas envolvidas no argumento. É o caso do exemplo ilustrativo acima, onde Demócrito abdica de uma das fórmulas de regresso – a saber, D1 – ao invés de rejeitar o pressuposto metafísico mais profundo acerca da racionalidade da realidade. Essa estratégia parece assimétrica com relação à estratégia utilizada pelos primeiros lógicos e conjuntistas que lidaram com a questão da quantificação irrestrita e a tentativa de oferecer modelos para tais quantificações. A tentativa de lidar com resultados tais como o paradoxo de Russell e o teorema de Cantor foram quase sempre na direção mais radical de expurgar a noção de uma generalidade absoluta e, consequentemente, de descredenciar uma intuição metafísica básica, a saber, a de que a realidade é um todo completo. Esse radicalismo parece expresso na ideia de que, enquanto um remédio contra os paradoxos, a rejeição completa de uma generalidade absoluta parece acabar com a doença matando o paciente.

Seguindo a linha de Gratton de oferecer uma resposta satisfatória para a questão "O que diferentes argumentos por regresso ao infinito compartilham?", em um artigo curto, mas bastante esclarecedor, Wieland (2013) defende que argumentos por regresso ao infinito são, em geral, usados com uma das duas finalidades básicas: (i) para refutar uma sentença universal (a fórmula de regresso de Gratton); (ii) para mostrar que uma determinada explanação é inviável. Essas duas finalidades são igualmente espelhadas no caso da síntese infinita que marca a semântica de quantificações irrestritas na medida em que (i)* uma quantificação irrestrita parece ser inviável na medida em que nunca obtemos o domínio completo da quantificação, e (ii)* a tentativa de pôr junto a totalidade de itens que satisfazem os predicados quantificados irrestritamente conduz a um processo infinito.

***

O panorama apresentado ao leitor no presente trabalho foi construído fundamentalmente para mostrar que as inúmeras tentativas de superar os impasses quanto à legitimidade de quantificações irrestritas nos termos clássicos da própria semântica padrão parecem limitadas em algum aspecto. As alternativas apresentadas nesse capítulo em defesa da quantificação irrestrita parecem falhar em um ou outro ponto relevante: ou apelam para uma distinção *ad hoc* entre classes e conjuntos, ou resolvem o problema escamoteando-o como o faz a estratégia por via indireta firmada no argumento da incoerência da rejeição. Nenhuma dessas alternativas me parecem suficientemente efetivas como uma defesa da quantificação irrestrita. Por essas e outras razões, pretendo avaliar no próximo capítulo uma alternativa de defesa da quantificação irrestrita que enfrente o debate diretamente e que, caso demande uma rejeição da semântica padrão, o faça munido de bons argumentos.

Além disso, tentei também apresentar uma relação de retroalimentação entre o tópico da quantificação irrestrita e algumas questões metafísicas. Espero com isso ter tornado evidente que não há uma solução possível ao problema que não passe por uma posição metafísica, ou ao menos epistemológica, acerca da nossa relação com o que chamamos de realidade. O debate entre as posições platonista e construtivista da realidade é um exemplo claro disso. Por um lado, temos a concepção plantonista de mundo como uma totalidade fechada. Essa concepção parece mais adequada à nossa intuição básica sobre a constituição da realidade. Por outro lado, verificamos que nossa semântica padrão aponta na direção de uma estrutura de realidade profundamente aberta, incompleta e que pode ser indefinidamente ampliada por processos construtivos definidos dentro dos nossos próprios sistemas formais. Qualquer que seja a posição tomada com relação à legitimidade ou ilegitimidade de quantificações irrestritas precisa também se posicionar quanto a tais questões de natureza mais metafísica.

Ao que me parece, o conjunto dessas análises, sejam elas contrárias ou favoráveis à quantificação irrestrita, apontam na direção de obstáculos insuperáveis nos termos da logica clássica e da semântica padrão dos quantificadores. Na semântica padrão não há quantificação irrestrita e, na melhor das hipóteses, não podemos expressar o que chamamos de generalidade absoluta. Daí para um ceticismo quanto a existência de tal generalidade é um pequeno passo. Diante de um quadro tão restritivo, penso que há razões bastante convincentes para ousarmos experimentar novos caminhos de enfrentamento do problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta. Tudo isso constitui matéria para o próximo capítulo.

4
DIALETEÍSMO, PARACONSISTÊNCIA E A TEORIA DE TUDO
Mudando de perspectiva

> As lógicas não-clássicas, no meu caso a lógica paraconsistente, nasceram do seguinte problema. Georg Cantor dizia que a essência da matemática está na sua liberdade. Pois bem, os paradoxos que surgiram no começo do século, em geral, foram eliminados com a manutenção da lógica tradicional e com a introdução de restrições nos postulados da teoria dos conjuntos. Se a matemática é absolutamente livre, como disse Cantor, vamos fazer um pouquinho diferente. Sem introduzir restrições nos postulados da teoria dos conjuntos, podemos mudar a lógica. E, com isso, podemos reconstruir a matemática clássica inteira.
>
> Newton da Costa

Se os meus objetivos foram até aqui cumpridos com sucesso, ao chegar ao presente capítulo já deve estar claro ao leitor que, em grande parte, é na noção de extensibilidade indefinida que se localiza o núcleo da rejeição de quantificações irrestritas. A introdução desta concepção acerca de conjuntos provém de um reconhecimento de que o comprometimento com o conjunto de tudo o que há – ou ainda, de uma generalidade absoluta – em adição à defesa incondicional de determinados princípios da teoria dos conjuntos, conduz nossa teoria a paradoxos.

Ao longo do presente capítulo quero apresentar de maneira um pouco mais sistemática as características lógicas da noção de extensibilidade indefinida. Dado o fato amiúde explorado de que nossa lógica clássica e nossa teoria usual dos conjuntos não dão conta da noção de uma totalidade absoluta, ao meu ver isso impõe basicamente a decisão entre permanecer com a lógica clássica e aceitar suas limitações quanto à quantificação irrestrita ou partir para uma nova abordagem. É basicamente isso que está por trás do que chamo de dilema de Grim. Minha posição diante desse dilema – e que devo apresentar neste capítulo – é a de explorar as vantagens que uma lógica não clássica e uma teoria paraconsistente dos conjuntos possam trazer para nosso discurso sobre a generalidade absoluta. Defendo esta posição com base na ideia de que, embora a lógica clássica encontre obstáculos aparentemente intransponíveis dentro de seus padrões contra a generalidade absoluta e a quantificação irrestrita, tanto nossa linguagem cotidiana quanto nossa visão de mundo mais intuitiva impõem esses fenômenos a nós de uma maneira que parece ineliminável.

4.1 A extensibilidade indefinida e o paradoxo de Russell generalizado

Dada sua importância para a teoria axiomática dos conjuntos, bem como suas implicações para a teoria dos modelos de uma maneira geral, muitos filósofos tentaram captar o que está realmente expresso no conceito de extensibilidade indefinida. Dummett, para quem, como vimos anteriormente, o paradoxo de Russell é na verdade uma prova, não da inconsistência da teoria dos conjuntos, mas da extensibilidade indefinida destes, define o conceito em questão da seguinte maneira:

> […] *indefinitely extensible* concept is one such that, if we can form a definite conception of a totality all of whose members fall under the concept, we can, by reference to that totality, characterize a larger totality all of whose members fall under it. (Dummett, 1993: p. 441)

Essa definição tenta captar a ideia básica de que um conceito α é indefinidamente extensível caso qualquer tentativa de expressar uma totalidade de itens que satisfazem α possibilite a geração de uma totalidade ainda mais ampla que a anterior e composta igualmente por itens que satisfaçam α. Em geral, essa possibilidade torna-se efetiva por intermédio de alguma operação definida na própria teoria que comporta α, assim como ocorre com a operação de potência na teoria dos conjuntos. O papel dessa operação pode ser formalmente expresso nos seguintes termos. Se um conceito α é indefinidamente extensível, então deve haver uma operação ε, tal que as seguintes cláusulas são satisfeitas com relação a α[36]:

(1) $\forall y\ (y \in x \leftrightarrow \alpha(y))$

(2) $\varepsilon(x) \notin x$

---

[36] Essas cláusulas, bem como o argumento que se segue, foram apresentados por Priest (2002: p.129). Ele chamou a cláusula (2) de *Transcendence* e a (3) de *Closure*. Já a operação ε garante o resultado equivalente ao processo de diagonalização cantoriana apresentado no capítulo 1. Como ficará claro mais adiante, parte deste capítulo discute algumas das ideias apresentadas por Priest (2013). Meu objetivo é desenvolver os resultados deste artigo com base na possibilidade de um tratamento não-clássico do problema da generalidade absoluta e da quantificação irrestrita a partir da ótica dialeteísta e dos sistemas paraconsistentes.

(3) $\alpha(\varepsilon(x))$

A cláusula (1) apresenta um conjunto x que possui como elementos tudo que satisfaz o conceito α, ou seja, x é a extensão de α. A cláusula (2) afirma que a operação ε aplicada a x resulta em um conjunto que não pertence à extensão de x. Por fim, em (3) temos que o conjunto resultante da operação $\varepsilon(x)$ também satisfaz o conceito α. Portanto, a operação $\varepsilon(x)$ produz um novo elemento que amplia a extensão do conceito α a um conjunto x^*. É fácil perceber que reiteradas aplicações da operação ε a cada nova extensão x^* de α produz um novo item $\varepsilon(x^*)$ que satisfaz α ampliando uma vez mais a extensão de α; e assim, *ad infinitum*. Com base nessas três cláusulas é possível expressar a alegada contradição derivada do comportamento de conceitos indefinidamente extensíveis. Definimos intensionalmente o conjunto Ω do seguinte modo:

(4) $\Omega = \{y \mid \alpha(y)\}$

É importante perceber que Ω é composto por exatamente os mesmos membros que o conjunto x expresso em (1), ou seja,

(5) $x \equiv \Omega$

No contexto do debate sobre quantificações irrestritas e generalidade absoluta apresentado no presente trabalho onde queremos saber se há algo como uma totalidade fechada de itens que satisfazem um conceito indefinidamente extensível, a pergunta que se põe aqui é: existe algo como o conjunto Ω expresso em (4)? Os passos abaixo revelam que não, dado que Ω envolve uma contradição.

(6) $\varepsilon(\Omega) \notin \Omega$ [a partir de (2) e (5)]

(7) $\alpha(\varepsilon(\Omega))$ [a partir de (3) e (5)]

(8) $\varepsilon(\Omega) \in \Omega$ [a partir de (1), (5) e (7)]

(9) $(\varepsilon(\Omega) \in \Omega) \wedge (\varepsilon(\Omega) \notin \Omega)$ [conjunção de (6) e (8)]

O que Priest (2002: seção 9.2) mostra com esse argumento é que as cláusulas (1)-(3) que expressam nossa intuição básica do comportamento lógico-semântico de um conceito indefinidamente extensível conduzem, por intermédio de um raciocínio simples, a uma contradição que ele chama de *Russell's Scheme*.

De acordo com Priest (2013: p. 1264) e Potter (2004: p. 29), Russell foi o primeiro a investir seriamente na tentativa de expressar de maneira clara o que há por trás da extensibilidade indefinida, embora ele usasse uma terminologia ligeiramente diferente da atual. Russell falava de uma *auto-reprodutividade* ocorrendo dentro da teoria dos conjuntos como mostra a seguinte passagem:

> […] there are what we might call *self-reproductive* processes or classes. That is, there are some properties such that, given a class of terms all having such a property, we can always define a new term also having the property in question. Hence we can never collect *all* the terms having the said property into a whole; because, whenever we hope we have them all, the collection which we have immediately proceeds to generate a new term also having the said property. (Russell, 1903: p. 36)

Além disso, como destacam Shapiro e Wright (2006: p. 258), na tentativa de descrever o comportamento de conceitos indefinidamente extensíveis, Russell (1907) defendeu – sem apresentar provas para tal – a existência de uma função biunívoca entre a extensibilidade de conceitos deste tipo e os números ordinais. Shapiro e Wright chamaram essa tese de *conjectura de Russell*: se P é um conceito indefinidamente extensível, então deve haver uma correspondência biunívoca entre os membros de P e os ordinais. Desse modo, seja α um ordinal de modo que todos os outros ordinais menores que α estão numa correspondência biunívoca com membros de P, então todo ordinal maior ou igual a α também está nessa mesma correspondência com membros de P. Esse raciocínio parece deixar mais uma vez clara a correlação existente entre a extensibilidade indefinida e o paradoxo de Burali-Forti juntamente com todas as suas consequências.[37]

De maneira geral, a estratégia de Russell para lidar com as contradições derivadas de raciocínios envolvendo esses conceitos indefinidamente extensíveis – pelo menos no que diz respeito aos paradoxos da teoria dos conjuntos – foi descredenciar a existência das totalidades abertas que eles parecem indicar. Para Russell, tais totalidades são produtos da admissão indevida de definições impredicativas, da chamada auto referência e do uso de círculos viciosos. Com

[37] Ao que parece, o próprio Cantor fez uso dessa correlação entre extensibilidade indefinida e os números ordinais à maneira da conjectura de Russell, ou seja, afirmando um aspecto isomórfico entre a totalidade de elementos que caem sob conceitos indefinidamente extensíveis e a totalidade dos números ordinais. Em carta a Dedekind onde Cantor desenvolve um esboço de sua série de *alephs*, ele levanta a questão da existência de um conjunto cuja cardinalidade não é um *aleph* e a responde negativamente, como fica claro na seguinte passagem: “This question is to be answered negatively (...) If we take a definite multiplicity [i. e., a set] V and assume that *no aleph* corresponds to it *as its cardinal number*, we conclude that V must be *inconsistent*. For we readily see that, on the assumption made, the whole system Ω [of transfinite numbers] is projectible into the multiplicity V, that is, there must exist a submultiplicity V' of V that is equivalent to the system Ω.” (van Heijenoort; 1967a: p. 113-17).

isso, Russell resolve a dificuldade técnica em lidar com a generalidade absoluta dissolvendo-a, ou seja, descredenciando tal concepção de totalidade. Como vimos anteriormente, a posição de Russell foi consolidada em ZFC de acordo com a qual não existem conjuntos absolutamente infinitos.

Embora aos objetivos do presente trabalho interesse apenas a extensibilidade indefinida de conjuntos, esse caráter pode também ser encontrado em outros conceitos usuais do nosso discurso, tais como os de número ordinal. Como afirmei acima, um argumento com resultados similares ao de Russell envolvendo extensibilidade indefinida pode ser obtido com relação à noção de número ordinal. Esse argumento constitui o chamado *Paradoxo de Burali-Forti* que, em linhas gerais, pode ser apresentado da seguinte forma: a toda boa ordem corresponde um número ordinal e todo seguimento inicial de ordinais forma uma boa ordem cujo ordinal a ele associado excede todos os ordinais dessa ordem. Com isso, se tomarmos o conjunto C de todos os ordinais, C expressa uma boa ordem e a ele deve estar associado um ordinal y, tal que y excede todos os ordinais presentes em C. Portanto, y excede todos os ordinais incluindo a si mesmo uma vez que sendo y um ordinal, em tese, y deve estar incluso no conjunto C de todos os ordinais. Tudo isso é claramente uma contradição que põe em xeque a credibilidade da totalidade absoluta de ordinais enquanto uma unidade.

Priest (2013: p.1266) mostra que uma pequena generalização das cláusulas (1)-(3) acima aplicadas ao argumento de Burali-Forti permite derivar os mesmos resultados de Russell. Essa generalização reconstrói a cláusula (2) usando o operador de negação "$\neg$" em detrimento da relação de não pertinência "$\notin$" para que possa expressar de maneira mais precisa outros conceitos indefinidamente extensíveis para além do conceito de conjunto. Vejamos como ocorre:

(1)* $\forall y\ (\chi(y) \leftrightarrow \varphi(y))$

(2)* $\neg\chi(\varepsilon(\chi))$

(3)* $\varphi(\varepsilon(\chi))$

onde ε continua sendo entendido como a operação sobre o conceito χ em questão que satisfaça a condição φ. No paradoxo de Burali-Forti, $\varphi(y)$ expressa a condição "ser um número ordinal", $\varepsilon(\chi)$ é o menor ordinal maior que todo ordinal y que satisfaz $\chi(y)$ para um dado conjunto de ordinais. Supondo que χ expressa a totalidade dos ordinais, então $\varepsilon(\chi)$ seria um ordinal maior que todos os ordinais; o que obviamente é uma contradição.

Nesse contexto, prefiro pensar a descrição feita por Priest do *Russell"s Scheme* – especialmente quando apresentada em termos que dispense noções conjuntísticas e que faça uso exclusivamente de termos puramente lógicos – como o que podemos chamar de *paradoxo de Russell generalizado*, ou ainda, de prova da extensibilidade indefinida dos conceitos que satisfaçam as cláusulas (1)*- (3)*. Com isso, Priest e Dummett concordam em um ponto fundamental, a saber, o resultado obtido por Russell é uma prova da extensibilidade indefinida do conceito de conjunto.

O que também me parece importante observar aqui é que, como vimos acima, nossas concepções de número cardinal e ordinal estão permeadas pela mesma extensibilidade indefinida presente na nossa concepção iterativa de conjunto formulada em ZFC. No entanto, até onde sei, nunca alguém levou seriamente em consideração um argumento contra a consistência da aritmética ou uma completa rejeição dos conjuntos dos ordinais com base no caráter indefinidamente extensível deste conceito. A pergunta que se põe aqui é a seguinte: Por que então recusar apenas a noção de generalidade absoluta? Parece haver aqui dois pesos e duas medidas. Até onde vejo, um estudo técnico sobre a generalidade absoluta parece demandar ou envolver uma resposta a esse tratamento "especial" dado a conjuntos, mas que é dispensado com relação a outros conceitos que, de igual modo, são indefinidamente extensíveis.

4.2 O dilema de Grim

Da forma como entendo a questão entorno da legitimidade da generalidade absoluta e do nosso modo de lidar tecnicamente com ela, o impasse sobre como viabilizar quantificações irrestritas no cenário atual pode ser expresso de maneira aproximada à de Patrick Grim:

> Were we actually to develop such a logic, we might well face a bifurcation within philosophical and logical theory. We would perhaps be forced to chose either to retain logic as we know it and the incomplete universe it seems to entail or to opt for a new logic that might promise a universe finished and complete but that would also predictably sacrifice some major portion of

> traditional logic and would offer a universe logically disorienting and unfamiliar in other regards. (Grim, 1991: p. 129)

Essa passagem marca o traço básico do que chamo aqui de *Dilema de Grim*; que é, na verdade, o dilema imposto a todos os teóricos da quantificação irrestrita. Por um lado, se aceitamos a lógica clássica juntamente com todo seu aparato semântico, estamos impossibilitados de dar conta satisfatoriamente do nosso discurso sobre a generalidade absoluta. Em outras palavras, a semântica padrão da lógica clássica nos conduz a um universo fundamentalmente incompleto e incompletável. O universo clássico é um universo aberto e em expansão. Por outro lado, se não pretendemos abrir mão do nosso discurso sobre a generalidade absoluta, somos impelidos a abandonar o privilégio da lógica clássica e nos aventurar em um sistema lógico que possa ser, em muitos aspectos, desconcertante e contra-inuitivo.

O dilema de Grim aponta numa importante direção para os objetivos do meu trabalho: uma tentativa de salvar as quantificações irrestritas do cenário de obstáculos exposto nos capítulos anteriores parece implicar fundamentalmente uma mudança de postura quanto à lógica clássica. De minha parte, penso que se até o presente momento não houve nenhum modo realmente promissor de lidar com quantificações irrestritas dentro dos quadros clássicos da lógica e da teoria dos conjuntos, parece-me legítima a proposta de procurar soluções por intermédio de outras abordagens. Como destaca Da Costa *et. al.* (1988: p. 17), investir em uma lógica não clássica é uma tarefa compatível tanto com o espírito hilbertiano de explorar todas as possibilidades do formalismo, quanto com a posição de Cantor segundo a qual a liberdade é um aspecto nuclear da prática matemática.

Grim (1991: p. 129) afirma ainda que esse dilema se impõe de maneira análoga ao que ocorreu em matemática com a quebra da hegemonia da geometria euclidiana. A necessidade de resolver alguns problemas envolvendo noções espaciais que não encontravam soluções adequadas no quadro teórico da geometria euclidiana, ou mesmo, o simples exercício técnico de testar a independência dos postulados de Euclides, possibilitou compreensões alternativas de noções espaciais; embora essas compreensões implicassem um distanciamento do que a intuição nos diz a respeito do espaço. A proposta de uma mudança radical de perspectiva na busca de um tratamento satisfatório de problemas que parecem insolúveis a partir da abordagem padrão não é um acontecimento com registros de sucesso apenas na história das ciências. Na filosofia moderna, Kant propôs o que ficou conhecido como uma "reviravolta copernicana em filosofia" ao fazer o que chamamos de "realidade" se adequar à estrutura cognitiva do sujeito do conhecimento; e não que o sujeito se adequasse a uma estrutura pré-estabelecida do mundo externo. Essa reviravolta constituiu o ponto arquimédico a partir do qual Kant projetou um novo modo de tratar o embate entre o empirismo e o racionalismo na epistemologia moderna.

Da forma como vejo, a proposta de explanar o problema da legitimidade de quantificações irrestritas e da disponibilidade da generalidade absoluta com base em uma lógica não-clássica pode ser considerada como uma "reviravolta copernicana" no nosso discurso sobre totalidades. Talvez não seja o discurso sobre totalidades que seja ininteligível, mas nossa lógica e nossa intuição do que seja uma totalidade que não é capaz de captar corretamente o que está por trás da generalidade absoluta. Ao que parece, foi Dummett (1991: p.319) um dos primeiros filósofos a perceber de maneira clara a necessidade de uma mudança de lógica quando afirmou de maneira categórica que o discurso que envolva qualquer conceito indefinidamente extensível só pode ser formulado consistentemente no seio de uma lógica intuicionista.

Minha proposta aqui difere da de Dummett em conteúdo, mas não em espírito. Da mesma forma que Priest (2013), penso que um tratamento com base numa lógica e uma teoria paraconsistente de conjuntos possa lançar luz sobre a legitimidade de quantificações irrestritas, bem como oferecer um novo olhar em direção aos fundamentos do discurso sobre a generalidade absoluta que supere as limitações e os impasses presentes na abordagem clássica apresentada nos capítulos iniciais desta tese. O que não devemos perder de vista é que há um fato básico que é a ocorrência do discurso sobre generalidades absolutas e me parece absurdo negar a realidade desse fenômeno com base na nossa atual incapacidade de lidar tecnicamente com ele. Muito mais razoável e fonte de ganhos filosóficos seria manter a credibilidade do fenômeno e buscar construir os meios técnicos para manipulá-lo racionalmente. Sobre o tema dos ganhos filosóficos quero ainda dedicar algumas palavras.

Uma questão de esclarecimento que pode ser levantada com relação ao ultimato representado pelo dilema de Grim é que, a decisão de endossar um tratamento formal de quantificações irrestritas não deve ser entendida como uma decisão puramente de preferências quanto à admissão ou rejeição de um sistema lógico qualquer. O dilema deixa claro que o que está em questão aqui é um *jogo* onde qualquer decisão tomada envolve sempre perdas e ganhos. Além disso, pode ser que haja importantes ganhos teóricos com essa mudança radical em favor de uma lógica não clássica, mas, de um ponto vista mais amplo exigido por uma pesquisa filosófica, a opção por um tratamento não clássico do problema da quantificação irrestrita precisa ser sustentada por um argumento que não seja puramente de decisão entre sistemas lógicos. Enquanto um jogo de ganhos e perdas, não importa qual seja o sistema formal escolhido, para cada ganho obtido pela escolha do sistema há uma perda representativa. Caso opte-se para uma lógica não clássica, teríamos, por exemplo, que sacrificar porções importantes e intuitivas da lógica tradicional. Caso opte-se por uma lógica clássica, perdemos o poder de expressar a também intuitiva ideia de que o universo é um todo completo e do qual faz sentido falar sobre. A questão que se põe, então, é a seguinte: por que seria melhor sacrificar a lógica clássica ao invés de abrir mão da possibilidade/legitimidade da quantificação irrestrita? Para que a solução a essa questão não seja *ad hoc* é preciso apresentar motivos independentes dos próprios sistemas formais em questão. Da forma como entendo o problema, esses motivos são de caráter filosófico e compõem aquilo que chamarei de *imposição do fenômeno* da generalidade absoluta. Eu mesmo proponho uma lista deles mais adiante.

4.3 Novos argumentos em favor da generalidade absoluta

Mesmo em meio a tantos respeitáveis argumentos técnicos contra a legitimidade de expressar algo envolvendo uma generalidade absoluta dentro da nossa teoria usual dos conjuntos, é praticamente impossível negar que nosso discurso está fortemente permeado por ideias de uma totalidade sem restrições e de uma extensibilidade indefinida. A presença de tais totalidades em nossa prática linguística cotidiana e no âmago de nossas linguagens formais é trazida à tona, vez por outra, através de algumas reflexões sobre nosso modo de quantificar, bem como por meio de paradoxos que parecem revelar uma referência inevitável e inegável à generalidade absoluta. No que segue, pretendo destacar alguns dos importantes argumentos presentes na literatura em favor da imposição da generalidade absoluta. Minha ideia é basicamente que, tomados conjuntamente, esses argumentos constituem o que chamo de *imposição do fenômeno*. Em outras palavras, embora nossa semântica clássica aponte na direção da rejeição da generalidade absoluta com base na extensibilidade indefinida de conjuntos, o fenômeno da totalidade sem restrições se impõe em nossas teorias e na nossa intuição básica sobre o mundo ao nosso redor. Com isso, a despeito das nossas limitações técnicas em lidar com tal fenômeno, é impossível ignorá-lo.

Em primeiro lugar, ao que tudo indica, nem mesmo Cantor foi capaz de repulsar completamente a ideia de uma totalidade sem restrições.

> In order for there to be a variable quantity in some mathematical study, the 'domain' of its variability must strictly speaking be known beforehand through definition. However, this domain cannot itself be something variable, since otherwise each fixed support for the study would collapse. Thus, this 'domain' is a definite, actually infinite series of values. (Cantor, 1886: p. 9)

A presente afirmação de Cantor deve ser entendida no contexto de sua defesa e justificação da existência de uma quantidade realmente infinita e atual de números transfinitos. No entanto, essa afirmação está amparada em pressupostos mais gerais e possui fortes consequências para o modo como entendemos totalidades irrestritas. Isso porque o que parece estar por trás da afirmação de Cantor, como destaca Hallett (1984; p. 25), é que não faz sentido falar de variabilidade de domínio em quantificações sem que isso seja uma variabilidade sobre um domínio mais amplo e completo. Para usar um exemplo de Priest (2013: p.1268-9), se tomarmos a seguinte sentença:

(S) Toda equação quadrática com coeficientes reais tem duas soluções,

A título de compreensão, uma *equação quadrática* – ou *equação do segundo grau* – é uma equação polinomial de grau dois que tem a seguinte forma básica: $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq0$; caso contrário, a equação seria linear. Nesse contexto, trata-se de um procedimento matemático simples verificar que a variabilidade de domínio associado a (S) determina e altera o valor de verdade de (S). Desse modo, (S) é verdadeira se seus quantificadores percorrem um domínio que inclua também números complexos, ao passo que é falsa para um domínio que inclua exclusivamente os reais. No entanto, o que a passagem de Cantor parece indicar é que essa variabilidade só pode ser realmente compreendida pressupondo uma totalidade mais ampla e definida que inclua todos os domínios variantes.

Em última instância, esse raciocínio possui consequências que conduz à ideia de que, se alguém está comprometido com uma variabilidade indefinida de domínio de quantificações – como ocorre quando tomamos conjuntos como domínios de quantificações e os interpretamos com base em uma concepção iterativa –, então esse alguém parece está igualmente comprometido com a totalidade infinita e a extensibilidade indefinida desses domínios, ou seja, com algo como o conjunto de todos os conjuntos. Obviamente, o que Hallett nos apresenta aqui é um Cantor ligeiramente diferente daquele que nos é apresentado na literatura sobre a quantificação irrestrita. Não é meu objetivo aqui fazer uma exegese da obra de Cantor e discutir a credibilidade da leitura que Hallett faz de passagens polêmicas da obra deste autor – tal como a passagem citada acima –, mas apenas mostrar que com boa vontade é possível pensar o problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta por outra ótica; e isso até mesmo Cantor parece ter em algum momento ensaiado. Esse forte e sedutor apelo do nosso discurso a totalidades irrestritas marca o que Hallett (1984: p. 7) chamou de *princípio do domínio* (*Domain Principle*).

Outro argumento que pode ser levantado em defesa da generalidade absoluta é obtido a partir do *paradoxo de König* – também conhecido como o paradoxo de Zermelo-König – que, em linhas gerais, pode ser descrito da seguinte maneira: há uma expressiva quantidade não enumerável de números reais, mas só uma parte enumerável desses números pode ser definida por meios finitos. *Grosso modo*, entendemos aqui *definir* um número como associá-lo a uma expressão notacionalmente finita, ou seja, uma expressão que possua uma quantidade finita de símbolos. Assumindo que a série dos números reais é bem ordenada, o conjuntos dos números reais que não podem ser definidos por meio finito deve possuir um primeiro membro na série dos reais; chamemos esse número de σ. No entanto, a expressão "o primeiro membro da série dos reais que não pode ser definido de maneira finita" já é, por si só, um modo de definir σ de maneira finita; o que parece implicar uma contradição.

Devido sua estrutura e sua referência à questão da possibilidade de definir números usando expressões de um determinado tipo, o paradoxo de König é comumente associado ao paradoxo de Richard e ao de Berry. Para König, o raciocínio acima constitui não um paradoxo, mas, na verdade, uma prova de que os reais não podem ser bem ordenados. Para os meus objetivos no presente trabalho interessa-me particularmente a afirmação de Priest (2013: p. 1270) de que seria possível reconstruir o *Russell's Schema* apresentado acima a partir do paradoxo de König, onde $\alpha(y)$ é "y é um ordinal definível", $\varepsilon(x)$ expressa a operação "o primeiro ordinal maior que n", onde n é o maior ordinal pertencente ao conjunto Ω que, no contexto em questão, é determinado pela condição $\alpha(y)$.

Ainda a respeito da presença de um discurso sobre totalidades irrestritas, me parece bastante razoável a afirmação de Dummett (1963) de que o teorema da incompletude de Gödel gera também um conjunto indefinidamente extensível com base numa compreensão específica dos conceitos de *verdade* e *prova* em matemática.[38] Vejamos os traços gerais desse argumento.

A ideia básica que alimenta o raciocínio de Dummett pode ser apresentada com base numa rápida descrição de alguns passos da prova de Gödel. Assumindo C como o conjunto de sentenças prováveis de um sistema *S* que tenha a aritmética como base, Gödel mostrou que é possível formular em *S* uma sentença *p* que diz dela própria que ela não é provável. Em outras palavras, *p* não pertence ao conjunto C. Além disso, Gödel engenhosamente mostrou que *p* é uma sentença verdadeira em *S*. No entanto, como *p* não pertence ao conjunto C de sentenças prováveis em *S*, concluímos que *S* é incompleto. Em princípio, *p* poderia ser provada com base em um sistema *S** que seja axiomaticamente uma extensão conservadora do sistema *S* de origem. Poderíamos também assumir *p* como um axioma de *S**. Não obstante, isso não resolveria o problema de apresentar um sistema formal completo para axiomatização da aritmética. A razão disso é que Gödel também mostrou que *S** gera, ele próprio, novas sentenças verdadeiras e não prováveis em *S**. Com isso, a passagem de *S* a *S** estende o conjunto C de verdades a um conjunto C*; onde cada um dos membros de C* são verdades prováveis em *S**. Contudo, ainda assim, é possível formular para o novo sistema

[38] Esse *insight* de Dummett é destacado tanto por Priest (2013) quanto por Shapiro e Wright (2006).

*S** uma sentença verdadeira *p** – nos mesmos moldes da sentença *p* anterior –, onde *p** não pertence a C*.

Obviamente, ao conduzir seu raciocínio, Dummett toma a expressão “provada” em um sentido amplo e ingênuo; não como quando dizemos que uma sentença é provável em um sistema axiomático em questão. Desconsiderando aqui toda uma discussão sobre as noções de *prova* e *verdade* como sendo relativas a um dado sistema e as entendendo de maneira filosoficamente mais abrangente, o que Dummett pretende mostrar é que reiteradas aplicações do procedimento descrito por Gödel em sua demonstração do teorema da incompletude estende indefinidamente o conjunto de sentenças prováveis, assim como o de sentenças verdadeiras, entendendo “provável” e “verdadeiro” aqui nesse sentido amplo mencionado anteriormente.

Uma forma de questionar a interpretação que Dummett faz do teorema da incompletude pode ser encontrada em Shapiro e Wright (2006: pp. 263-4) e apela para distinções de níveis à maneira de Tarski (1933). Nessa objeção, o conjunto C* de verdades prováveis não poderia de modo algum comportar a sentença *p* de Gödel, dada que ela deve ser entendida satisfatoriamente, não como uma verdade aritmética, que constitui a linguagem objeto em questão, mas uma verdade estabelecida na metalinguagem.

> If “definite collection” means something like *set*, and if the latter concept is undestood as in classical mathematics, then it just seems wrong – arithmetical truth is not indefinitely extensible. Following Tarski, one can give a straightforward explicit definition of “arithmetical truth”. It then follows from the *Aussonderungsaxiom* that there is a set of all arithmetical truths. There is no “Gödel sentence” for this set. (Shapiro & Wright, 2006: p. 263)

Contudo, não estou bem certo quanto à força da objeção apresentada por Shapiro e Wright. Para que ela funcione, ela precisa ser confrontada com a concepção de conjunto da matemática clássica; o que significa novamente esbarrar em todas as limitações impostas pela teoria usual dos conjuntos e colocaria novamente a sentença que Shapiro e Wright alegam ser metalinguística no mesmo nível das demais sentenças matemáticas. Até onde parece, não era nesse contexto que Dummett formulou sua interpretação do teorema da incompletude de Gödel. Como vimos, Dummett, como um legítimo intuicionista, possuía uma visão construtivista desses resultados. E isso, ambos, Shapiro e Wright reconhecem textualmente na sequência da passagem citada acima.

Embora a proposta de Dummett seja bastante rica e digna de uma análise mais detalhada, esse não será presentemente meu objetivo. No entanto, para não deixar o leitor carente de compreensão, de minha parte, penso que a abordagem intuicionista da quantificação irrestrita possui algumas desvantagens especialmente no que diz respeito à sua aplicação em importantes porções do conhecimento humano, tal como a matemática. Como já é de amplo conhecimento, a semântica intuicionista impõe sérias restrições às estratégias de provas e compromete parte relevante da produção matemática. Não me atrai enfrentar tais desvantagens para salvar quantificações irrestritas. Pretendo percorrer outros caminhos.

Antes de avançar em minha proposta, é hora de apresentar algumas motivações de ordem filosófica para sustentar a legitimidade da generalidade absoluta e de nosso discurso sobre ela. Feito isso, estaremos prontos para nos posicionarmos efetivamente quanto ao dilema proposto por Grim e discutido acima.

4.3.1. A imposição do fenômeno

O conjunto de argumentos apresentados anteriormente tem como objetivo básico mostrar, por um lado, que a generalidade absoluta parece muitas vezes ser um pressuposto de nossas construções teóricas e, por outro, que a extensibilidade indefinida é um fenômeno amplamente presente nas nossas teorias formais e nossas teorias de mundo em geral. O problema é: como conciliar a presença das duas em um mesmo cenário de trabalho de modo que possamos lidar tecnicamente com ambas? Muito do que foi dito até então ajuda-nos a perceber que pode ser razoável sustentar que a extensibilidade indefinida não é necessariamente um fator de impossibilidade de assunção da existência de uma totalidade última. Talvez, no máximo, um obstáculo técnico para lidar formalmente com tal totalidade. Penso que todos esses argumentos – e mais outros que os limites deste trabalho não permitem apresentar – apontam na direção do que chamo de *imposição do fenômeno* da generalidade absoluta. Da forma como vejo, há alguns fatores básicos que determinam e ajudam a sintetizar essa imposição do fenômeno:

1. Há um fenômeno linguístico real. Por vezes, estamos factualmente falando sobre absolutamente tudo. Nesse caso, não parece sensato negar o fenômeno meramente por causa de nossa incapacidade de lidar formalmente com ele a partir da nossa semântica padrão construída nos limites da lógica clássica. Frequentemente, nossas afirmações sobre o mundo levantam pretensão de universalidade absoluta.
2. Todos nós compartilhamos um senso robusto de realidade que nos diz que, por maior que seja a estrutura da realidade e as entidades que ela comporta, o real é um todo completo e que, portanto, faz sentido falar na totalidade maximal do que existe. Me parece que é exatamente essa intuição está presente na forma como Quine em *On what there is* apresenta a simplicidade de formulação da questão ontológica, bem como da resposta que podemos dar a ela: O que há? Tudo! Nesse sentido, a crítica à concepção semântica de uma generalidade absoluta e à legitimidade das quantificações irrestritas, tal como ela é feita a partir dos paradoxos dos conjuntos, não deveria abalar a nossa concepção ontológica e intuitiva da totalidade absoluta do real. Em certos aspectos, podemos falar até mesmo de uma concepção pré-filosófica da generalidade absoluta.
3. A extensibilidade indefinida está presente em outros campos do conhecimento sem causar o mesmo mal-estar verificado com relação à semântica para quantificações irrestritas. Embora números ordinais, números cardinais e as noções de prova e verdade na aritmética envolvam a extensibilidade indefinida, os matemáticos não parecem constrangidos em realizar afirmações gerais sobre números.

Para além dos fatores apresentados acima, é ainda possível sustentar que alguns dos princípios básicos da própria teoria axiomática dos conjuntos ZFC lançam mão de quantificações irrestritas. Esse é um dado extremamente interessante, uma vez que foram muitos desses princípios que criaram os principais obstáculos técnicos para a semântica de quantificações irrestritas. Como já foi discutido amiúde ao longo deste trabalho, o paradoxo de Russell mostrou que no processo de construção cumulativa de conjuntos que marca a concepção iterativa nenhum conjunto pode ser membro de si mesmo, ou seja,

$\forall x\neg(x\in x)$

Absolutamente nada pode ser membro ou parte de si mesmo!

Do mesmo modo, como consequência básica da definição do conjunto vazio – tão importante para a teoria pura dos conjuntos – temos que:

$\forall x\neg(x\in\varnothing)$

A ideia de que nada é elemento do conjunto vazio não é de modo algum restrita a algum contexto relevante de discurso. De fato, o que se tem em mente é que absolutamente nada é membro do conjunto vazio. A questão que se põe é a seguinte: se não é possível entender o sentido pleno dessas afirmações sem entendê-las como quantificações irrestritas, então como a teoria dos conjuntos pode lidar com a imposição do fenômeno da generalidade absoluta e do nosso discurso sobre totalidades absolutas dentro de sua própria estrutura teórica? Podemos ainda apresentar esse mesmo desafio em outros termos: se o sentido pleno de muitas afirmações feitas em ZFC indicam que elas são afirmações absolutamente gerais, como então compatibilizar esse entendimento com o fato de que a semântica padrão fundada na mesma teoria dos conjuntos não viabiliza o tratamento de sentenças absolutamente gerais? Para mim, esse é um impasse fundamental que, além de não poder ser ignorado, não pode também encontrar solução nos mesmos quadros clássicos da semântica padrão. Caminhemos então em direção a uma nova perspectiva do problema.

4.4 Sobre contradições e o problema da generalidade absoluta

A lógica clássica possui entre seus pilares fundamentais a ideia de que a admissão de uma contradição por parte de um sistema lógico *S* qualquer provoca a trivialização dedutiva de *S*. É precisamente essa ideia que está expressa no famoso lema *ex falso quodlibet* formulado pelos lógicos escolásticos. De um ponto de vista clássico, a admissão de uma contradição em um sistema permite a derivação de qualquer sentença do sistema em questão. Se um sistema *S* possui entre seus teoremas uma sentença do tipo $\varphi\wedge\neg\varphi$, então qualquer sentença β de *S* é também um teorema de *S*. Desse modo, um argumento com uma premissa contraditória pode até ser válido de um ponto de vista clássico, mas nunca será correto. Esse lema escolástico constitui hoje o núcleo do chamado *Princípio de Explosão*:

$$\varphi\wedge\neg\varphi\vdash\beta$$

Podemos também apresentar o mesmo princípio mostrando que a trivialização dedutiva segue-se do fato de que um conjunto Γ de premissas que permita inferir sentenças contraditórias pode inferir qualquer sentença do sistema a qual ele pertence. Essa ideia pode ser expressa do seguinte modo:

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi \quad \Gamma\vdash\neg\varphi}{\Gamma\vdash\beta}$$

Dado o exposto acima, precisamos agora guardar uma informação que será resgatada adiante e que cumprirá um papel fundamental na compreensão das próximas etapas deste trabalho: de um ponto de vista clássico, o princípio de explosão coloca no mesmo nível inconsistência e trivialização, ou seja, dado qualquer sistema formal clássico ele é inconsistente se, e somente se, ele for dedutivamente trivial. Por isso, uma estratégia de prova de consistência de sistemas formais clássicos apela para o caráter não trivial da consistência. Caso um sistema formal possua pelo menos uma sentença β não demonstrável, então ele é consistente.

Vale ressaltar aqui que o princípio de explosão está em íntima relação com outros princípios lógicos clássicos fundamentais, tais como o princípio de não-contradição (PNC) [$\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$] e o do terceiro excluído (PTE) [$\varphi\vee\neg\varphi$], bem como com algumas regras de inferência, a exemplo da famosa *reductio ad absurdum* (RA): $(\neg\varphi\rightarrow(\beta\wedge\neg\beta))\rightarrow\varphi$. Além disso, importantes metateoremas como o da correção ou consistência de sistemas formais só podem ser plenamente compreendidos à luz do papel que contradições executam em sistemas formais. Da forma como costumeiramente a noção de consistência é introduzida nos livros textos de lógica, um sistema formal clássico *S* é dito *consistente* ou *correto*, caso para nenhuma sentença φ de S ocorra que φ e ¬φ sejam dedutíveis em *S*. Todas essas características marcantes que determinam os princípios fundamentais da lógica clássica conferiram às contradições um papel de *persona non grata*. Essa visão estritamente negativa das contradições certamente ajudou a forjar um parâmetro de segurança sob o qual toda a lógica clássica se consolidou com credibilidade, mas também estabeleceu uma barreira ideológica que impôs sérios obstáculos ao estabelecimento de sistemas formais alternativos.

Como destaca Da Costa *et. al* (1998: p. 20), a rejeição de contradições marcadamente presente no PNC por parte da lógica clássica assume diversas formulações variando o contexto onde ele está sendo expresso. Isso pode ser verificado através da seguinte lista:

(i) No nível linguístico proposicional: $\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$;

(ii) No nível linguístico quantificacional: $\forall x\neg(\varphi(x)\wedge\neg\varphi(x))$;

(iii) No nível metodológico: nenhuma teoria deve conter teoremas contraditórios;

(iv) No nível semântico: uma proposição e sua negação não podem ser simultaneamente verdadeiras.

Poderíamos acrescentar à lista de Da Costa ainda um quinto nível:

(v) No nível epistêmico/psicológico: não podemos racionalmente acreditar na verdade de uma afirmação e de sua negação em um mesmo contexto.

Essas diversas formulações são pedagógicas, pois através delas podemos perceber de maneira bastante clara como o padrão clássico de rejeição de contradições transbordou os limites da pura lógica e se estendeu pelas múltiplas formas da atividade racional: na lógica, linguística, psicologia, teorias científicas ou numa simples conversa cotidiana. A lista de exemplos é extensa demais para esgotarmos aqui. Certamente já vimos em algum momento alguém recusar uma dada informação concedida por uma determinada pessoa alegando que a pessoa em questão caiu em contradição. Algumas situações são ilustrativas. Imagine um juiz ouvindo um depoimento, um eleitor assistindo a um comício de um candidato ou um aluno explicando ao professor por que não teve tempo de entregar o artigo que ele havia prometido escrever.

4.4.1. Wittgenstein e a reavaliação das contradições.

Podemos certamente dizer que a lógica clássica foi construída com base no que Wittgenstein (1978; I, Apêndice III. 17) chamou de um "medo supersticioso e uma veneração diante da contradição". Não por acaso, é comum a ideia de que, se os paradoxos derivados a partir da teoria ingênua dos conjuntos entram em rota de colisão com a noção de uma totalidade irrestrita, tanto pior para esse tipo de totalidade, uma vez que, de um ponto de vista clássico, é melhor restringir o poder de expressão e o comprometimento do sistema formal com vista a salvaguardar sua consistência do que manter totalidades irrestritas e trivializar o poder dedutivo do sistema em questão.

Essa postura diante da contradição é uma herança da autoridade que a lógica clássica merecidamente conquistou ao longo dos séculos. Nesse contexto, se quisermos fazer um rastreamento histórico da rejeição de contradições, é destacável a passagem do Livro Γ da *Metafísica* (1005b24) onde Aristóteles se refere ao princípio de não contradição como o "mais certo de todos os princípios".[39] Com efeito, é possível sustentar essa certeza quanto à validade do PNC por intermédio do fato de que uma tentativa de demonstrar que o PNC não é válido envolve muitas vezes argumentos por via indireta que, por sua vez, já pressupõe uma rejeição a contradições. Desse modo, uma refutação do PNC deve ter um caráter especial e direto.

A tese do caráter fundamental do PNC ecoa por toda a história da lógica e da filosofia. Em sua famosa obra *An Inquiry into the Human Mind on the Principles of Common Sense* de 1764, Thomas Reid pôs o PNC no rol dos princípios fundamentais impostos pelo senso comum dada sua clareza e auto-evidência. Também P.F Strawson em seu *Introduction to Logical Theory* de 1952 dedica parte de seu estudo à tentativa de caracterizar em mais detalhes o PNC.

No entanto, esse cenário de defesa incondicional do PNC vem mudando significativamente ao longo dos anos, tornando-se assim menos unilateral e, por conseguinte, mais complexo. Atualmente, é cada vez mais patente a ideia de que determinados estágios de desenvolvimento de teorias científicas comportam frequentemente afirmações contraditórias.[40] O mesmo fenômeno da contradição surge também com força na análise de problemas da computação, em especial, na programação lógica envolvendo cláusulas contraditórias e alguns tópicos sobre inteligência artificial.

[39] Curiosamente, embora Aristóteles tenha sido o filósofo que estabeleceu o padrão da lógica clássica especialmente fundado no princípio de não contradição e princípios correlatos, a exemplo do terceiro excluído, foi ele também um dos primeiros filósofos a suspender o uso irrestrito de princípios clássicos ao discutir contextos especiais tais como o do futuro contingente. Destaca-se nesse aspecto o famoso *argumento da batalha naval* presente no capítulo 9 do *De Interptetatione* que expõe um sério obstáculo à bivalência das proposições.

[40] Num exemplo bastante didático dessa afirmação, Brown (2002: p. 630) mostra como o modelo atômico sustentado por Bohr continha determinadas contradições a respeito do comportamento do elétron na eletrosfera do átomo de hidrogênio. No entanto, a inconsistência obtida era fundamental para o fenômeno mais geral que Bohr estava estudando.

No que diz respeito à lógica, é cada vez maior o número de lógicos e filósofos trabalhando em sistemas formais que suspendem o uso irrestrito do princípio de explosão e que, consequentemente, abrem espaço para a admissão do uso controlado de contradições. Curiosamente, o mesmo Wittgenstein que ressaltou o medo supersticioso e a veneração diante da contradição na lógica clássica, em outra passagem frequentemente citada (Wittgenstein, 1978: p. 332) – a qual destaco mais adiante – foi também capaz de prever a mudança de postura com respeito à contradição.

Da forma como penso, Wittgenstein representa um ponto de destaque nessa discussão contemporânea sobre contradições, uma vez que ele foi um dos primeiros grandes nomes da filosofia dita analítica a dividir o que venha a ser o problema lógico e o problema filosófico da contradição. Para Wittgenstein, o desafio de assegurar a consistência ou correção dos sistemas clássicos caracteriza o problema lógico da contradição. Ele pode ser expresso através da seguinte questão: como garantir que num determinado sistema lógico formal não se possa derivar contradições como teoremas? No entanto, há uma questão não meramente técnica que, pelo fato de ter sido por muito tempo tomada como óbvia na tradição, muitas vezes foi relegada ao esquecimento: por que devemos evitar contradições? Essa é uma pergunta que admite também uma resposta de ordem filosófica. Nas *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein divide claramente essas duas posturas quanto ao tratamento de contradições:

> Não é tarefa da filosofia solucionar a contradição por meio de uma descoberta matemática, lógico-matemática. Mas tornar visível em seu conjunto a situação da matemática que nos inquieta, o estado *antes* da solução da contradição. (E com isso não se esquiva de uma dificuldade.)
>
> O fato fundamental é aqui: fixamos as regras, uma técnica, para um jogo, e então, ao seguirmos as regras, as coisas não funcionam tão bem como havíamos suposto; portanto, nós nos enleamos, por assim dizer, em nossas próprias regras.
>
> Este enlear-se nas próprias regras é o que queremos entender, i. e., queremos abarcá-lo com a vista.
>
> Ele lança uma luz em nosso conceito de ter-em-mente. Pois ele é, naqueles casos, diferente do que tínhamos em mente e tínhamos previsto. Quando surge a contradição, dizemos, por exemplo: “Não foi assim que o tive em mente.”
>
> O estado civil da contradição. Ou o seu estado no mundo civil: este é o problema filosófico. (*Investigações Filosóficas*, §125)

Impossível não olhar a passagem acima como um convite a repensar, pelo menos de um ponto de vista filosófico, o estatuto das contradições nos nossos jogos ou sistemas formais e como uma sugestão implícita de que as coisas poderiam ser diferentes do que de fato são com relação à contradição. Essa discussão cumpre um papel central para nosso objetivo de reabilitar quantificações irrestritas sem trivializar dedutivamente o sistema em que elas ocorrem. Dado todo o exposto nos capítulos anteriores, já deve estar claro ao leitor que tal reabilitação é impossível nos quadros da semântica padrão da lógica clássica. O próprio Wittgenstein destaca que, no paradigma clássico, devemos "pôr restrições à expressão da generalidade de modo a evitar que sejamos obrigados a extrair consequências indesejadas disso" (Wittgenstein, 1967: §692).

As passagens da obra de Wittgenstein sobre contradições são inúmeras, assim como são os questionamentos que ele faz com relação à contradição clássica. No entanto, Wittgenstein esteve longe de mostrar efetivamente, por meio da construção de um sistema formal, como as contradições operariam de modo a não conduzir o sistema em questão na direção da trivialização. Se ele tivesse alcançado esse feito, certamente seria tomado hoje como mais um dos pais da paraconsistência. Pode-se dizer que isso não ocorreu, dentre outras coisas, porque a intenção de Wittgenstein não era e não podia ser a de construir tal sistema; a menos que se confunda, no projeto filosófico de Wittgenstein, a filosofia com a ciência, ou ainda, sua terapia da linguagem com a tentativa de construir mecanismos formais de interpretação do mundo; no caso os sistemas formais paraconsistentes. Obviamente, isso seria um absurdo exegético. O que estou tentando destacar aqui é que a concepção quietista de filosofia de Wittgenstein impedia de antemão este tipo de empreendimento teórico. O trecho citado acima (IF §125) faz parte inclusive de uma sequência em que Wittgenstein expõe essa concepção de filosofia.

Por fim, não há como terminar essa digressão sobre as reflexões de Wittgenstein a respeito das contradições sem citar a impressionante passagem onde ele, de maneira visionária, antecipa o futuro das contradições.

> How strange! This comes out here – and that there! Who would have thought it? Then how interesting if it were a contradiction which came out! Indeed, even at this stage I predict a time when there will be mathematical investigations of calculi containing contradictions, and people will actually be proud of having

> emancipated themselves even from consistency. (Wittgenstein, 1978: p. 332)

Sendo ou não simpático à agenda filosófica de Wittgenstein, não há como negar que uma afirmação tão consciente como a destacada acima só pode vir de alguém com uma excelente visão das consequências dos resultados obtidos em seu tempo. Passemos então ao próximo passo: descortinar o futuro antevisto por Wittgenstein!

4.4.2. Dialeteísmo e Paraconsistência

No contexto da lógica contemporânea, essa mudança de postura diante das contradições tem certamente como pilares fundamentais a retomada do *dialeteísmo* e o simultâneo desenvolvimento dos *sistemas paraconsistentes*.[41] É fundamentalmente eles que pretendo apresentar aqui em suas linhas gerais e, posteriormente, discutir sua contribuição para uma possível via de reabilitação da noção de uma generalidade absoluta e da quantificação irrestrita.

O termo "dialeteísmo" foi originalmente proposto por Graham Priest e Richard Rutley[42] no início da década de 1980 para caracterizar a tese de que existem *dialetheias*, ou seja, que existem sentenças não contraditórias φ – ou ainda, sentenças que não são da forma $x \wedge \neg x$ – tal que φ e sua negação, $\neg\varphi$, são ambas verdadeiras. Isso implica que, de acordo com o dialeteísta, algumas – mas

---

[41] Falo aqui em uma "retomada" tendo em vista que há claros exemplos na tradição lógica e filosófica de investigações sobre teorias que comportem contradições. Esse não é um desafio inaugurado pelos lógicos contemporâneos. De um ponto de vista histórico, há importantes trabalhos já entre os medievais que seguem essa agenda. Um exemplo disso é o interesse do filósofo e lógico Duns Escoto (1266-1304) por contradições. Para Duns Escoto, a universalidade do princípio de não contradição pode ser legitimamente questionada em determinados contextos. Como todo bom filósofo cristão ocidental na idade média, Escoto associava esses contextos especiais a algumas afirmações da fé que parecem envolver contradições, tais como a natureza da trindade divina. Em verdade, de acordo com ele, a racionalidade do conteúdo da fé só poderia ser justificada em termos que estão para além dos princípios lógicos aristotélicos. Há ainda na perspectiva escotista, em um sistema teórico contendo contradições, a possibilidade de lidar com questões práticas e de aspecto moral sem conduzir a moralidade enquanto tal a um relativismo indesejado pela teologia cristã. A tese de que Duns Escoto é um precursor da paraconsitência é defendida em detalhes em Parisoli, Luca. (2005) *La Contraddizione Vera*: Giovanni Duns Scoto tra le necessità della metafisica e il discorso della filosofia pratica. Roma: Istituto storico dei cappuccini, 2005.

[42] De acordo com Priest e Berto (2013), o termo foi inspirado na passagem do *Remarks on the foundation of mathematics* de Wittgenstein (1978: IV. 59) a respeito da sentença base do paradoxo do mentiroso "Esta sentença não é verdadeira". Nela, Wittgenstein caracteriza a afirmação que dá origem ao paradoxo como análoga a cabeça de dupla face do deus romano Jano na medida em que a sentença do mentiroso é tanto falsa quanto verdadeira. Daí a ideia de que a sentença paradoxal produz uma *di-aletheia*, ou seja, uma "dupla verdade".

não todas – contradições são verdadeiras.[43] Entendendo a falsidade como definida enquanto a negação da verdade, fica igualmente claro que o dialeteísta afirma que há sentenças que são verdadeiras e falsas num só tempo. No contexto teórico do dialeteísmo, ao assumir que p seja uma *dialetheia*, ou seja, que p e $\neg p$ sejam ambas verdadeiras e, assumindo também o princípio de que, se uma sentença é verdadeira, sua negação é falsa, então somos levados a assumir que p e $\neg p$ são também ambas falsas. Isso implica que o dialeteísmo assume conjuntamente que todas as contradições são falsas, embora algumas dessas contradições de um tipo especial sejam também verdadeiras. Por mais estranho que isso possa parecer a uma mente educada seguindo os princípios fundamentais da lógica clássica, o dialeteísmo é mais austero do que se imagina e ele não implica necessariamente um trivialismo dedutivo. Um dialeteísta afirma que apenas algumas e muito especiais sentenças são *dialetheias*. Em um sistema dedutivamente trivial, não apenas algumas, mas *todas* as contradições seriam verdadeiras. Portanto, embora um trivialista seja algo como um dialeteísta extremado, nem todo dialeteísta é também um trivialista. A título de esclarecimento, o dialeteísmo que pretendo levar em consideração no presente trabalho é do tipo não trivialista.

Obviamente, para que alguém possa sustentar de maneira eficiente uma posição dialeteísta sem trivializar seu sistema dedutivo é preciso realizar significativas modificações nos princípios lógicos clássicos de modo a evitar a explosão do sistema em questão. Isso quase sempre envolve a rejeição e substituição de regras de inferência. Um modo promissor de modificar os princípios clássicos com vista a comportar uma posição dialeteísta é dado pelos sistemas paraconsistentes.[44]

[43] A tarefa de oferecer exemplos confiáveis do que seja uma contradição verdadeira é certamente um dos pontos de origem de grandes polêmicas com os quais os dialeteístas se envolvem rotineiramente. Pretensos candidatos surgem a partir de nossas teorias científicas mais recentes em suas descrições da realidade em níveis bastante fundamentais e distantes dos dados proporcionados diretamente pelos sentidos. Como exemplos temos alguns estranhos fenômenos descritos pela física quântica, tal como a de que uma partícula em um acelerador possui uma posição não discreta no espaço-tempo, além de algumas situações de indeterminâncias quânticas.

[44] Alguns lógicos de destaque, a exemplo de Łukasiewicz e Vasiliev, já se sentiam seduzidos por interpretações alternativas para a contradição e esboçaram essa sedução em alguns de seus trabalhos. Certamente, em virtude de suas posições com relação às contradições, eles figuram como pioneiros das lógicas não-clássicas. No entanto, foi somente em meados do século xx que sistemas paraconsistentes foram efetivamente propostos através dos trabalhos vanguardistas de Jaśkowski (1948), Da Costa (1963) e Nelson (1959). Historicamente, o termo “paraconsistência” é atribuído à Francisco Miró-Quesada.

Dizemos de um sistema formal que ele é paraconsistente caso o princípio da explosão não seja válido para ele. Em outras palavras, caso a inferência $\varphi\wedge\neg\varphi\vdash\beta$ não seja válida para toda sentença β do sistema em questão. Nesse caso, um sistema paraconsistente comporta contradições sem provocar sua própria trivialização dedutiva. Em outras palavras, um sistema paraconsistente é um sistema *inconsistente*, porém *não trivial*. Essa é uma informação central, pois é nessa característica de sistemas paraconsistentes que reside a diferença substancial com relação aos sistemas clássicos. Apesar da flagrante inconsistência, não há irracionalidade nos sistemas paraconsistentes uma vez que é observada a garantia de não trivialização. Como vimos anteriormente, no paradigma clássico inconsistência e trivialização são noções indissociáveis.[45]

Alguns esclarecimentos são importantes para uma compreensão da relação existente entre o dialeteísmo e a paraconsistência. O fato de admitir algumas contradições em seus sistemas formais não implica que o dialeteísta e o lógico paraconsistente admitam também que todas as sentenças do sistema em questão sejam demonstráveis. Embora seja isso que factualmente ocorreria nos quadros da lógica clássica por intermédio do princípio de explosão, nem mesmo um lógico não-clássico está disposto a aceitar uma consequência tão drástica para o poder dedutivo de linguagens formais. Os lógicos, de uma maneira geral, manipulam sistemas formais com objetivos e interesses bem definidos. Um sistema dedutivamente trivial, onde as noções de prova e verdade estariam completamente esvaziadas, seria irrelevante para qualquer fim racional. Nesse ponto, os lógicos clássicos, os dialeteístas e os lógicos paraconsistentes estão em concordância. A motivação anti-contradições dos lógicos clássicos é, em última instância, uma estratégia anti-trivialização. No entanto, o dialeteísmo e a paraconsistência figuram como alternativas na medida em que esta última mostra como manter algumas contradições sob controle sem cair no abismo da trivialização dedutiva, enquanto que o primeiro oferece as bases filosóficas de admissão de contradições verdadeiras.

É importante ter em mente também que um sistema paraconsistente não precisa ser também dialeteísta, uma vez que um lógico paraconsistente não

[45] Outro detalhe digno de nota aqui é que há quem defenda também que a contradição não é a única porta de entrada para a trivialização dedutiva. Alguns lógicos recorrem ao Paradoxo de Curry apresentado no Capítulo 1 como um resultado que produz uma trivialização dedutiva a partir de uma premissa que não possui a forma contraditória $\varphi\wedge\neg\varphi$.

necessariamente assume a tese de que há contradições verdadeiras. Em primeira instância, as lógicas paraconsistentes podem ser entendidas meramente como um dispositivo técnico a partir de onde possamos trabalhar formalmente e de maneira controlada com contradições sem cair no trivialismo dedutivo. Essa posição de caráter instrumental é o que Priest e Berto (2013) chamam de *paraconsistência fraca*. A ideia básica seria oferecer um recurso técnico para lidar com modelos inconsistentes, ou seja, modelos onde contradições ocorram, sem a admissão de que esses modelos expressem possibilidades reais. Não há, portanto, nenhuma implicação ontológica ou epistêmica na paraconsistência fraca.

Não obstante, muitas vezes, nosso modo de encarar contradições é cultivado por um conjunto de pressupostos de natureza filosófica que nos diz mais do que decisões de caráter puramente formal. Por exemplo, a tese de que algumas dessas contradições podem ser aceitas também como verdadeiras é um acréscimo dialeteísta que não está na base puramente formal da paraconsistência. Essa última posição é, por sua vez, chamada de *paraconsistência forte* e está associada ao comprometimento de aspecto metafísico com modelos que não encontram fundamento de sustentação na lógica clássica. De um ponto de vista da teoria de mundos possíveis, essa afirmação pode ser entendida de duas maneiras: tanto como uma defesa de que esses modelos inconsistentes são possíveis, ou seja, que eles são satisfeitos por algum mundo possível *W* diferente do mundo atual, quanto como a admissão de contradições verdadeiras *simpliciter*, i.e., a afirmação de que descrições mais sofisticadas da estrutura do nosso próprio mundo – ou seja, o mundo atual – comportam contradições verdadeiras. De um modo ou de outro, a paraconsistência forte vem acompanhada de uma posição metafísica em nada banal. Em uma leitura mais moderada, essa paraconsistência forte pode também ser lida a partir de uma posição epistêmica acerca da nossa forma de descrever aquilo que chamamos de "realidade". Mais adiante pretendo me posicionar em favor dessa abordagem moderada.

Com isso, me parece também razoável distinguir o dialeteísmo da paraconsistência na medida em que a defesa do dialeteísmo me parece fundada em razões de ordem eminentemente filosófica sobre a constituição última do que chamamos de realidade, ao passo que o uso de um sistema paraconsistente envolve uma decisão técnica de apelo a determinados recursos formais para o tratamento de sistemas contraditórios, mas não triviais. Enquanto determinado por uma posição filosófica, é possível ainda fazer uma distinção entre o que eu penso ser um realismo e um anti-realismo dialeteísta. Se pensamos na realidade nela mesma como dotada de contradições, estamos pensando o dialeteísmo de um ponto de vista realista. Essa é certamente a posição mais forte, dado que ela se constitui enquanto uma rejeição do pressuposto básico e dominante no pensamento ocidental de que a realidade é não-contraditória. Nesse contexto, o dialeteísmo de vertente realista é uma posição não somente sobre sentenças, mas também sobre as próprias entidades que compõem a realidade física ou abstrata. Se essa posição estiver correta, ela diz respeito não apenas a pares de sentenças verdadeiras e contraditórias, mas também a objetos contraditórios no mundo.[46] Em suma, em sua vertente realista, o dialeteismo encontra a forma mais radical de paraconsistência. O realismo dialeteísta endossa declaradamente uma ontologia livre de restrições quanto às contradições; o que equivale a dizer que o mundo assumido pelo dialeteísta radical contém, nele mesmo, contradições.

É importante ter em mente que, embora a mudança significativa de perspectiva representada pelo dialeteísmo sustente a hipótese de que a realidade é contraditória, ela não implica que essa mesma realidade seja irracional. Essa era uma alegação dos gregos antigos: contradição implica irracionalidade. Na matriz não-clássica do dialeteísmo, contradição e irracionalidade não são noções correlatas. Isso ocorre porque a contradição não é entendida pelo dialeteísta como um elemento que contamina toda a estrutura à qual ela pertence, de modo que uma teoria que explicasse tal estrutura seria dedutivamente trivial. Em verdade, nessa concepção realista ontológica, o dialeteísmo afirma que contradições estariam presentes apenas enquanto casos limites, sem que isso implique na ideia de que a realidade enquanto tal seja logicamente caótica.

Não obstante, eu proponho aqui uma mudança de perspectiva. Como penso, o dialeteísmo pode também ser defendido a partir de uma concepção de

[46] Uma defesa de objetos contraditórios – a exemplo do quadrado redondo – pode ser encontrada na teoria de objetos de Meinong. No entanto, Meinong não subordinou sua teoria a uma lógica paraconsistente nem conferiu-lhe uma roupagem dialeteísta. Todo esse aparato técnico e filosófico lhe era completamente desconhecido. Nesse contexto, seria uma interessante proposta de pesquisa verificar até onde é possível oferecer um tratamento paraconsistente à ontologia meinongiana. Para conhecer a teoria de Meinong cf. MEINONG, Alexius. (2005) "Sobre a Teoria dos Objetos". (trad. Celso Reni Braida). In: BRAIDA, C. R. *Três Aberturas em Ontologia*: Frege, Twardowski e Meinong. Florianópolis: Rocca Brayde edições. p.93-145. Disponível on-line em: http://www.cfh.ufsc.br/~braida/aberturas.pdf. Último acesso: 19/02/2015.

realidade de orientação mais próxima da kantiana, ou seja, a realidade entendida não como realidade-em-si, mas como produto de uma construção. A diferença significativa da minha proposta com relação à de Kant é que, enquanto Kant pensava na realidade como uma construção derivada da aplicação dos dados da sensibilidade às nossas categorias, ou numa terminologia mais contemporânea, às faculdades cognitivas humanas, eu penso no que chamamos de realidade como um produto de nossos esquemas conceituais. Nesse contexto, a defesa do dialeteísmo é de ordem anti-realista e com uma forte tendência ao relativismo de esquemas conceituais na medida em que ela está baseada na afirmação de que nossa forma humana de perceber aquilo que chamamos de realidade – bem como nossas teorias sobre ela – está ineliminavelmente comprometida com contradições. Nossas melhores teorias para explicar não só a realidade enquanto uma totalidade, mas também descrever seus níveis mais básicos, parecem apontar para contradições que estão além da capacidade técnica do formalismo clássico. O próprio Kant parece ter chegado a uma tese muito próxima ao descrever na dialética transcendental de sua *Crítica da Razão Pura* aquilo que ele chamou de *paralogismos* e *antinomias da razão pura*. No sistema kantiano, esses paralogismos e antinomias surgem da nossa limitação em organizar a totalidade dos dados da sensibilidade. Os limites do entendimento deixam sempre lacunas explanatórias que se manifestam em termos de contradições.

A minha rejeição à proposta kantiana de ler esse anti-realismo de uma forma idealista epistêmica reside em não querer me comprometer com uma abordagem demasiadamente psicologista da realidade, mesmo que seja um psicologismo de um Eu transcendental. Em certo sentido, essa minha rejeição se reflete também em minha resistência ao intuicionismo e sua abordagem da matemática como produto da atividade mental dos matemáticos. Penso que a proposta de tratamento de quantificações irrestritas sugerida por Dummett e mencionada anteriormente pode funcionar do ponto de vista formal, mas me desagradam as implicações filosóficas e para a prática matemática que se seguiriam dela.

Um quadro geral dessa relação entre dialeteísmo e paraconsistência, da forma como o descrevi, pode ser verificado na Figura 2 abaixo. Destacado em negrito estão as posições defendidas ao longo desta tese.

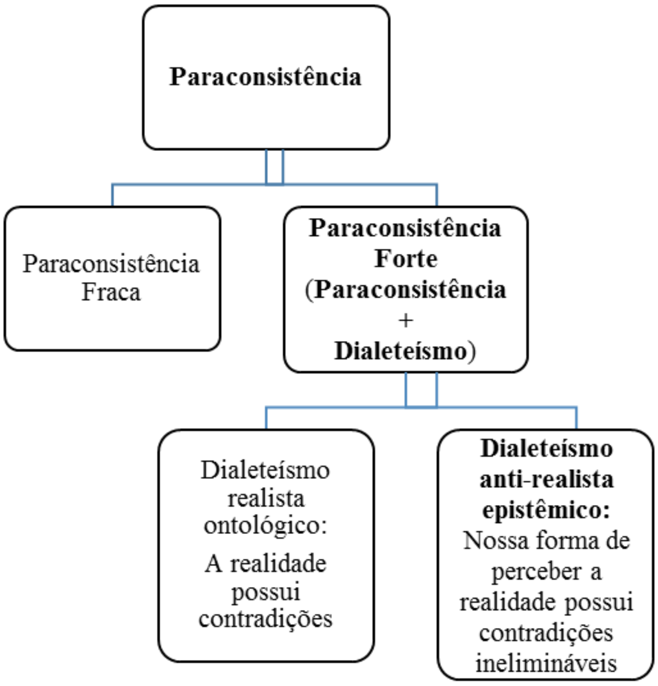

Figura 2 – Sobre a relação entre dialeteísmo e paraconsistência

Antes de avançar, é importante deixar claro que o que chamo aqui de "dialeteísmo anti-realista" é uma proposital distorção da literatura sobre o tema. Até onde conheço, os trabalhos mais relevantes desenvolvidos pelos defensores do dialeteísmo são fundamentalmente forjados em uma matriz realista ontológica. Minha proposta representa aqui uma ruptura com essa matriz.

Alguém poderia alegar que não há uma diferença substancial entre a versão anti-realista do dialeteísmo e a paraconsistência fraca uma vez que, em ambos os casos, o que está em jogo é uma possibilidade de lidar com as contradições no nosso modo humano de nos relacionarmos com a realidade, mas isso seria, pelo menos em um aspecto, um equívoco. A paraconsistência fraca, do modo como a apresentei anteriormente, é um mecanismo formal de lidar com contextos teóricos pontuais envolvendo informações contraditórias, ao passo que o anti-realismo dialeteísta é uma generalização acerca do caráter contraditório de nossas construções teóricas. Desse modo, o dialeteísta anti-realista sustenta uma posição filosófica global sobre nossas teorias de mundo ao afirmar que elas estão fundamentalmente povoadas por contradições. Em resumo, a paraconsistência, tomada estritamente, é sempre entendida aqui como um recurso técnico-formal. O aspecto filosófico é um *import* dialeteísta, seja ele realista ontológico ou anti-realista epistêmico.

O simples fato de que, de um ponto de vista puramente formal, possamos dar conta de contradições sem conduzir o sistema como um todo na direção da trivialização dedutiva não justifica o alto preço de abdicar do padrão estabelecido pela lógica clássica. Sem um lastro na realidade ou, pelo menos, na nossa forma de compreendê-la, os sistemas não clássicos seriam jogos de pura manipulação simbólica; um treino meramente heurístico que, apesar de altamente sofisticado, dificilmente seria objeto de interesse científico geral. As motivações com relação ao dialeteísmo e à paraconsistência revelam um cenário de forte interação entre formalismo e conteúdo. Seria ingenuidade pensar os sistemas não clássicos como uma mera brincadeira lógica. Muitos sistemas formais construídos deliberadamente para lidar de maneira técnica com situações práticas constantemente se defrontam com informações contraditórias ou conflitantes sem com isso abraçar a trivialização dedutiva. Nesses casos, a paraconsistência pode figurar como uma atraente possibilidade. Alguns exemplos podem ser ilustrativos. As lógicas deônticas não trivializam conflitos de obrigação. Do mesmo modo, lógicas epistêmicas não trivializam crenças contraditórias. Para um tratamento formal de operadores epistêmicos isso é de extrema importância, pois, enquanto seres com limitada capacidade de raciocínio, nós nunca temos um pleno domínio das consequências de nossas crenças; nem sempre sabemos em exatamente quais casos um par de crenças que assumimos são inconsistentes entre si. Nesses sistemas lógicos, uma compreensão paraconsistente da relação de consequência lógica pode ser extremamente útil. Essa é, sem dúvida alguma, uma forte razão para repensar o estatuto das contradições em sistemas formais.

A lista de motivações para um novo olhar sobre contradições é certamente extensa. Embora à primeira vista possa parecer um contrassenso, o estudo da contradição paraconsistente ajuda-nos indiretamente a entender os limites dos próprios princípios lógicos clássicos na medida em que exploramos as consequências da rejeição desses princípios. Em verdade, um trabalho nessa mesma direção já estava sendo desenvolvido internamente à própria axiomatização da lógica clássica. O desenvolvimento da formalização de sistemas clássicos pelos lógicos contemporâneos foi decisivo para mostrar que muito daquilo que Aristóteles tratava como princípios fundamentais poderiam ser obtidos como teoremas de um sistema igualmente clássico, mas que assumisse como axiomas enunciados distintos daqueles elegidos por Aristóteles. Um exemplo disso é a axiomatização da lógica de predicados feita por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica*, onde nenhum dos três princípios clássicos aristotélicos figura na lista de cinco axiomas lá contidos. O fato de nos *Principia* os princípios aristotélicos figurarem como teoremas parece indicar fortemente que a escolha dos axiomas clássicos possui algum grau de convencionalismo. Isso por si só não prova que a lógica clássica não é a única possível. Não obstante, na medida em que percebemos que o que chamamos de axiomas clássicos e nosso modo de apresentar a lógica clássica depende, em grande medida, de decisões por convenção, nós percebemos também que essas mesmas decisões por convenções podem nos levar legitimamente para searas que ultrapassam as intuições fundamentais estabelecidas na lógica clássica. Podemos legitimar pragmaticamente sistemas formais onde princípios lógicos aristotélicos não sejam nem axiomas nem teoremas.

A postura de suspeita quanto à verdade necessária de princípios clássicos é elevada ao grau máximo no naturalismo de Quine, onde ele defende que todas as verdades – e isso inclui os princípios clássicos – podem ser revisadas caso sejam postas em questão por uma experiência recalcitrante. Tal experiência muitas vezes está associada aos casos limites que conduzem uma ciência de uma teoria à outra na tentativa de explicar uma classe específica de fenômenos.

> Any statement can be held true come what may, if we make drastic enough adjustments elsewhere in the system. Even a statement very close to the periphery can be held true in the face of recalcitrant experience by pleading hallucination or by amending certain statements of the kind called logical laws. Conversely, by the same token, no statement is immune to revision. Revision even of the logical law of the excluded middle has been proposed as a means of simplifying quantum mechanics; and what difference is there in principle between such a shift and the shift whereby Kepler superseded Ptolemy, or Einstein Newton, or Darwin Aristotle? (Quine, 1953: p. 43)

Já quando aplicada ao contexto específico da teoria dos conjuntos – o que pretendo discutir em mais detalhes nas próximas páginas –, a paraconsistência se mostra uma importante ferramenta de análise de operações de abstração tomadas irrestritamente, tal como ocorre com o princípio ingênuo da compreensão. No que diz respeito mais estritamente aos objetivos do presente trabalho, o que deve guiar os próximos passos de minha argumentação é a relação entre contradições, paraconsistência, quantificações irrestritas e a generalidade absoluta. Minha ideia é a de verificar a possibilidade de um tratamento formal de conjuntos que possam figurar como domínio para quantificações irrestritas sem conduzir o sistema como um todo a uma trivialização dedutiva por intermédio de paradoxos.

Haack (2002: p. 208-12) oferece um quadro geral de como os lógicos reagem aos casos limites que, de algum modo, escapam ao poder de expressividade da lógica clássica; argumentos que insistem em subverter o alegado caráter necessário de princípios clássicos. Em linhas gerais, as reações se agrupam em duas linhas, a saber, (i) a que objetiva adequar os casos limites à lógica clássica por meio de adaptações internas ou extensões conservativas do sistema e (ii) a que rompe com a hegemonia clássica e busca resolver o problema através de um sistema formal alternativo. Vejamos alguns exemplos ilustrativos de cada linha:

Acomodações internas dos casos limites

(a) **Delimitação do âmbito da lógica:** exclui da lógica aqueles argumentos informais que não são coerentemente acomodados no formalismo clássico. Essa é a postura mais radical: se não é coerente em termos clássicos devemos evitar! Em grande parte, os argumentos de caráter lógico contra a quantificação irrestrita apresentados no segundo capítulo podem ser enquadrados dentro dessa estratégia.

(b) **Apelo à paráfrase (forma enganosa):** trata-se da solução do problema por meio do reconhecimento de uma forma lógica enganosa. Os argumentos informais problemáticos são acomodados aos quadros da lógica clássica ao se admitir que seu caráter problemático deve-se não a uma falha da lógica clássica, mas ao modo pelo qual formalizamos o argumento. Haack cita como um exemplo histórico dessa estratégia a teoria das descrições definidas de Russell que passou a tratar alguns casos problemáticos de sentenças aparentemente da forma F*a* reinterpretando formalmente aquilo que supõe-se o termo singular da sentença como uma função proposicional em uma sentença existencialmente quantificada.

(c) **Inovação semântica:** assim como em (b), admite-se a possibilidade de um tratamento clássico para os casos limites, mas, ao invés de promover adaptações sintáticas, modifica-se alguns aspectos semânticos pontuais de modo a finalmente acomodar os casos limites. Por exemplo, a mudança de uma interpretação objetual para uma substitucional dos quantificadores possui uma motivação semântica. Ela visa uma maneira de acomodar casos problemáticos na lógica clássica envolvendo impasses quanto ao comprometimento ontológico de sentenças quantificadas e suas consequências indesejadas para determinadas posições filosóficas.

(d) **Lógica clássica ampliada:** busca acomodar os argumentos informais problemáticos ampliando conservativamente os poderes de expressão e/ou dedução clássicos. Trata-se de uma *ampliação conservativa*, pois tudo aquilo que era expresso e demonstrado pela lógica clássica estrita é mantida no sistema estendido. No entanto, novos argumentos podem ser formulados e, consequentemente, novas conclusões obtidas. Em geral, isso é feito acrescentando mais operadores, bem como as regras de inferência que os governam. Um exemplo bem sucedido disso é o da lógica modal e seus operadores de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$).

(e) **Lógica clássica restringida:** contrariamente a (d), busca acomodar os argumentos informais problemáticos restringindo os poderes de dedução clássicos. Embora o alfabeto básico do sistema permaneça inalterado, os axiomas e regras de inferência são restringidos de tal forma que muitos dos argumentos incialmente válidos para o sistema deixam de sê-lo. Obviamente, nesse caso, o conjunto de verdades prováveis é profundamente alterado.

Acomodações externas dos casos limites

(f) **Contestação de meta-conceitos:** muitas vezes, a opção por uma lógica alternativa à lógica clássica é motivada não simplesmente por um argumento problemático, mas por uma discordância quanto ao tratamento que é dado nos termos clássicos a algum conceito meta-lógico tal como o de verdade ou validade. Haack (2002: p. 210) toma exatamente esses dois conceitos, pois eles são precisamente os casos que ilustram a criação respectivamente da lógica intuicionista e da lógica relevante.

(g) **Revisão do âmbito da lógica:** essa estratégia vem comumente acompanhada da revisão dos conceitos meta-lógicos, mas sua especificidade é marcada pela admissão de novas regras de inferência – bem como a rejeição de algumas regras clássicas – que alteram radicalmente o âmbito da lógica. Se encaixa nesse contexto o novo tratamento para contradições descrito anteriormente nos quadros da paraconsistência e do dialeteísmo.

Vale notar que as acomodações externas à lógica clássica dos argumentos problemáticos e de reinterpretações para conceitos meta-lógicos são dadas tanto por extensões da lógica, na medida em que novos operadores são introduzidos juntamente com suas regras de inferência, quanto por restrições de regras de inferência que são válidas em termos clássicos, mas não no novo sistema não clássico. De certo modo, é possível afirmar que as estratégias (a)-(g) são progressivamente mais radicais, sendo (a) a mais conservadora com relação aos limites da lógica clássica e a possibilidade de revisá-la, ao passo que (g) é a menos comprometida com uma primazia e superautoridade de uma lógica monolítica.

Haack (1974) fala das lógicas que propõem revisões conservativas da lógica clássica – o caso descrito em (d) – como sendo “complementares”. Nessa classe se encaixam os sistemas modais de David Lewis e a lógica deôntica. Por outro lado, as revisões não conservativas caracterizadas em (f) e (g) são por ela chamadas de “rivais” da lógica clássica. Como exemplos temos a lógica intuicionista de Brouwer, a lógica paraconsistente de Newton da Costa e a lógica polivalente de Łukasiewicz. Essas lógicas rivais são profundamente heterodoxas. No que diz respeito especificamente ao problema da quantificação irrestrita, a tentativa de olhar para o problema a partir de uma perspectiva não clássica é também motivada pela ideia de que as estratégias (a)-(e) não obtêm sucesso em tratar esse caso limite da quantificação universal. O dilema de Grim tenta expressar exatamente a ideia de que nenhum rearranjo interno à lógica clássica permite o tratamento de afirmações sobre generalidades absolutas. Somente uma mudança mais radical e estrutural seria capaz de abarcar o fenômeno.

***

Retomando minha linha de raciocínio sobre o problema da quantificação irrestrita e a generalidade absoluta – agora amparado também pela discussão que desenvolvi acima em torno da noção de contradição –, o cenário que se desenha até o presente momento é o seguinte: as grandes objeções à quantificação irrestrita estão todas elas fundadas no surgimento de paradoxos dentro da semântica padrão descrita no capítulo 1. As contradições que esses paradoxos revelam inviabilizam a construção de modelos para quantificações irrestritas. Caso não respeitemos esse limite de expressão da semântica padrão, podemos obter tais quantificações, mas em um sistema formal dedutivamente trivial; o que seria algo não desejado. No entanto, se podemos dispor de mecanismo técnicos tais como o dos sistemas paraconsistentes, parece legítimo testar nossa capacidade de controlar as contradições dos paradoxos associados à quantificação irrestrita de modo a reabilitar tais quantificações em um sistema inconsistente, porém não trivial.

4.4.3. ... e de volta às quantificações irrestritas.

Toda longa viagem precisa de um ponto de partida e condições iniciais adequadas; especialmente se for uma viagem não convencional. Uma abordagem não-clássica é como essa viagem não convencional pelos caminhos tortuosos das contradições. Abandonar o paradigma estabelecido pela semântica padrão é abandonar uma zona de conforto e buscar outros mecanismos a partir dos quais possamos interpretar nossas afirmações. Aplicada ao contexto que domina a presente pesquisa, podemos levantar as seguintes questões: O que é preciso para obter uma abordagem não-clássica da quantificação irrestrita nos moldes da paraconsistência? Uma lógica paraconsistente é capaz de lidar formalmente com a generalidade absoluta? São a essas perguntas que quero me dedicar de agora em diante.

Obviamente, a proposta de um tratamento lógico não-clássico para o problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta vem acompanhada da emergência da formulação de uma semântica igualmente alternativa. Construir uma semântica lógica para um sistema paraconsistente baseada em uma teoria clássica dos conjuntos tal como a estabelecida a partir de ZFC seria um contra-senso. Ela jamais conseguiria dar conta das intuições subjacentes aos modelos não-clássicos. Nesse contexto, a necessidade de gerar uma semântica lógica para sistemas paraconsistentes foi o fator primordial – mas não único – de criação de uma teoria paraconsistente dos conjuntos.[47] Mas onde buscar a justificativa para um remédio considerado por muitos como excessivamente forte para tratar a quantificação irrestrita? Em minha opinião, parte dessa justificativa reside na discussão sobre paradoxos.

Na medida em que o dialeteísmo ressurgiu no século xx na esteira da discussão sobre paradoxos, criou-se o cenário propício para uma justificativa não só técnica, mas também filosófica, para os sistemas formais paraconsistentes. Boa parte do que apresentei até aqui visou mostrar que os paradoxos associados à quantificação irrestrita constituem o maior obstáculo ao tratamento técnico de tais quantificações. Com isso, a reabilitação do discurso formal sobre uma totalidade irrestrita deve vir acompanhada de uma superação de tais paradoxos. É de amplo conhecimento a vasta literatura que há sobre pretensas teorias gerais de paradoxos, sendo essas entendidas enquanto uma tentativa de propor uma solução unificada para argumentos paradoxais. O próprio Russell (1908) sustentou que paradoxos surgem na medida em que ferimos o chamado *princípio do círculo vicioso* (PCV). De acordo com Russell, se evitamos circularidades e as infames definições impredicativas, temos então uma vacina contra paradoxos. O posterior surgimento de paradoxos que não envolviam circularidade parece ter enterrado de vez a proposta de Russell como uma solução unificada. Desse modo, não pretendo desenvolver uma discussão mais detalhada sobre ela aqui.

Seguindo uma estratégia fundada em intuições que lembram em alguns momentos às de Russell, mas que em modo de proceder possui sua própria originalidade, Tarski (1933) também submeteu uma proposta de solução geral de paradoxos; ou pelo menos aos paradoxos ditos semânticos. A proposta de Tarski está baseada em uma concepção específica do funcionamento da linguagem. De

[47] Como Da Costa *et al*. (1998: p. 4) chamam atenção, é importante lembrar que a teoria paraconsistente dos conjuntos nasceu não só com a função teórica de gerar modelos semânticos para sistemas paraconsistentes, mas também com o objetivo prático de solucionar uma série de problemas em computação e informática em geral.

acordo com essa concepção, *via de regra* as linguagens funcionam obedecendo a duas características fundamentais:

(i) Elas são semanticamente fechadas, i. e., elas possuem, além de termos como “verdadeiro” e “falso”, meios para se referir a suas próprias expressões.

(ii) As leis lógicas clássicas valem para suas sentenças e a semântica nelas embutida.

A estratégia de Tarski foi construída no seio de uma teoria da verdade e defende uma hierarquia de linguagens onde temos uma linguagem-objeto L_0 e uma cadeia supostamente infinita de meta-linguagens L_1, L_2, L_3, e assim sucessivamente, de modo que cada linguagem L_n – onde *n* é um índice para o nível da linguagem em questão – só possua meios legítimos para se referir a expressões da linguagem L_{n-1} imediatamente inferior na hierarquia. Uma sentença autorreferente tal como a famosa “esta sentença é falsa” do paradoxo do mentiroso é, portanto, ilegítima, pois ela fere a hierarquia tarskiana de linguagens. Desse modo, a estratégia de Tarski é uma rejeição à característica (i) descrita acima. Em consonância com Russell, a hierarquia de linguagens proposta por Tarski figura com um mecanismo de eliminação de circularidades com estreito grau de familiaridade com mecanismos formais tais como a teoria dos tipos.

Embora a hierarquia de linguagens de Tarski seja amplamente celebrada nos círculos filosóficos, ela também possui seus opositores. Uma das mais duras críticas desferidas contra a proposta tarskiana foi levantada por Kripke (1975). De acordo com Kripke, é impossível atribuir índices linguísticos com a precisão exigida por Tarski. Para ilustrar sua objeção, Kripke chama atenção para a seguinte sentença dita por Jones:

(1) Todas das declarações de Nixon sobre o Watergate são falsas.

Seguindo os critérios de Tarski, (1) deve pertencer a um nível superior a cada uma das declarações de Nixon à quais Jones se refere. No entanto, pelo menos em princípio, não temos como determinar o nível linguístico de cada uma das declarações de Nixon sobre o Watergate. Kripke vai além e diz que pode haver situações onde não só não poderíamos determinar o nível de cada uma das declarações de Nixon, como também algumas delas podem ter atribuições de níveis que leve a contradições. Para verificar isso, suponha que uma das declarações de Nixon sobre o Watergate seja:

(2) Todas as declarações de Jones sobre o Watergate são falsas.

Nesse caso em particular, a declaração (2) de Nixon deve pertencer a um nível imediatamente superior a todas as declarações de Jones sobre Watergate e a declaração (1) de Jones pertencer a um nível imediatamente superior a todas as declarações de Nixon sobre Watergate. No entanto, sendo (1) e (2) declarações sobre Watergate, fica fácil perceber que o cenário acima descrito impõe que (1) seja de um nível superior à (2) e (2) de um nível superior à (1); o que é obviamente inconsistente. Alguém poderia argumentar com boas razões para isso que o que Kripke mostrou com seu contraexemplo é precisamente que a hierarquia de níveis de linguagens desenvolvida por Tarski, quando defrontada com situações materialmente adversas, pode comportar um paradoxo.[48] Certamente essa é uma conclusão irônica, dado que uma das principais motivações de Tarski era justamente a de resolver paradoxos.

Tendo em vista que tanto a proposta de Russell quanto a de Tarski possuem pontos de objeção ao tentar tratar os paradoxos a partir de uma rejeição de (i), parece legítimo testar outras estratégias de conter ou controlar paradoxos. Nesse sentido, de maneira radicalmente diversa opera a proposta que pretendo levantar aqui ao menos enquanto uma direção de pesquisa digna de ser percorrida. Seguindo a concepção de linguagem de Tarski caracterizada nos pontos (i) e (ii) destacados acima, a proposta de uma abordagem não clássica da quantificação irrestrita, bem como dos paradoxos associados a ela, figura como uma negação de (ii). Podemos reconstruir nossas linguagens de um ponto de vista sintático e semântico de modo que elas não precisem obedecer de maneira irrestrita aos princípios clássicos. A tentativa de construção de uma teoria paraconsistente dos conjuntos cumpre essa função no que diz respeito ao aspecto semântico. A hipótese que pretendo apresentar aqui – dentro dos limites que este trabalho

[48] Haack (2002: p. 197) destaca a seguinte situação onde o caráter paradoxal destacado no argumento de Kripke torna-se evidente: suponha que Nixon tenha dito que (i) todas as declarações de Jones sobre o Watergate são verdadeiras. Suponha também que Jones tenha dito que (ii) todas as declarações de Nixon sobre o Watergate são falsas. Nesse caso, a declaração (ii) de Jones caso verdadeira, seria falsa; e caso falsa, seria verdadeira. Portanto, (ii) é verdadeira se, e somente, se (ii) é falsa.

permite – é a de que uma teoria paraconsistente dos conjuntos aliada a um agregado básico de teses afirmadas pelo dialeteísta pode oferecer os fundamentos técnicos para um novo olhar sobre os paradoxos dos conjuntos; especialmente aqueles descritos no primeiro capítulo e que estão associados ao ataque contra a quantificação irrestrita e a generalidade absoluta.

Um aspecto importante a ser destacado aqui e que constituirá tópico de relevo para a abordagem paraconsistente da quantificação irrestrita diz respeito à(s) ontologia(s) suportada(s) por sistemas formais envolvendo contradições controladas. De acordo com Da Costa (1982: p.14), podemos reeditar o famoso *slogan* de Quine – *ser é ser o valor de uma variável* – que atribui comprometimento ontológico aos valores das variáveis quantificadas de modo a captar de maneira mais fiel o papel dos nossos sistemas lógicos na determinação de nossa visão geral de mundo. Nos termos da reedição proposta por Da Costa, "ser é ser o valor de uma determinada variável em uma determinada lógica". Com isso, Da Costa relativiza a ontologia ao sistema lógico. Uma comparação com o surgimento das geometrias não-euclidianas pode ser didática no presente contexto. Da mesma forma que diferentes geometrias comportam diferentes concepções de espaço, e que não há uma resposta última e decisiva sobre qual seja a estrutura do espaço que constitui a realidade independente de nossas construções teóricas, não há também como determinar o que seja *a* ontologia que explane corretamente a estrutura do real. Essa questão admite diferentes respostas derivadas, em última instância, de opções quanto ao uso de determinados sistemas formais. Um exemplo claro disso é a distância estabelecida entre as ontologias suportadas por sistemas clássicos e não-clássicos. Nesse ponto, o dilema de Grim apresentado anteriormente é categórico: na ontologia e na semântica suportadas pela lógica clássica não há espaço para a generalidade absoluta e, consequentemente, para a quantificação irrestrita. Se quisermos resgatar essas noções, precisamos de um sistema formal compatível com o tratamento técnico de uma realidade completa em sua totalidade; não uma totalidade aberta e em constante expansão.

Algumas observações sobre a ontologia pressuposta em minha abordagem do problema são bastante pertinentes, pois ajudarão a esclarecer dúvidas filosóficas que porventura possam surgir. Dada a distinção estabelecida anteriormente entre concepções realistas e anti-realistas do dialeteísmo, é importante também destacar qual dessas concepções está em jogo na proposta que será apresentada em seguida. De minha parte, penso que sustentar uma afirmação sobre a constituição da realidade nela mesma como sendo contraditória – ou não – é algo que escapa nossas capacidades teóricas de oferecer justificativas. Não sei até que ponto a posição realista é compatível com os limites frequentemente percebidos em nossos esquemas conceituais. Minha suspeita aponta na direção de uma incompatibilidade. Penso que, nos moldes clássicos, há limites fundamentais e insuperáveis na nossa capacidade de construir um discurso sobre a totalidade da realidade, embora esse discurso se mostre indispensável em nossas práticas linguísticas. Tentei ressaltar essa indispensabilidade na tese da imposição do fenômeno. Nos resta, portanto, a alternativa de reorganizar nossos esquemas conceituais de modo a satisfazer a indispensabilidade do discurso sobre totalidades irrestritas e a generalidade absoluta. É aqui que entra em cena a abordagem paraconsistente.

Obviamente, essa forma de interpretar o problema em termos dos limites de nossos esquemas conceituais está muito mais próxima da versão anti-realista do dialeteísmo. É essa forma de dialeteísmo que pretendo levar em consideração. Não se trata aqui de propor uma defesa injustificada de uma realidade nela mesma contraditória, mas de uma realidade que construímos conceitualmente de maneira contraditória para atender a determinadas exigências nossas, bem como às nossas intuições mais fundamentais sobre como percebemos e nos relacionamos com o mundo.

Um primeiro passo que é de extrema necessidade superar na direção de uma abordagem paraconsistente da quantificação irrestrita é a de controlar as contradições derivadas pelos paradoxos obtidos na teoria dos conjuntos que inviabilizam a construção de um modelo para tais quantificações. Caso essa exigência seja satisfeita, podemos também dar um grande passo na direção de um tratamento técnico da generalidade absoluta.

A literatura lógica costuma classificar os paradoxos em pelo menos dois tipos gerais.[49] Por um lado, temos os *paradoxos semânticos*, que dizem respeito, fundamentalmente, às noções tais como a de *verdade* e de *definibilidade*. Alguns dos exemplos mais famosos são: o paradoxo do mentiroso; o paradoxo de Grelling-Nelson; o paradoxo de Richard; o paradoxo de Berry; dentre outros. Por

[49] Para uma leitura introdutória sobre Paradoxos e uma discussão sobre as possíveis soluções unificadas propostas por Russell, Tarski e Kripke cf. Haack (2002).

outro lado, temos os chamados *paradoxos de conjuntos*, que são assim denominados por serem gerados com base em raciocínios envolvendo noções conjuntísticas tais como a de *pertinência* e a de *cardinalidade*. O paradoxo de Russell e o teorema de Cantor – que por vezes é também chamado de paradoxo de Cantor – trabalhados no capítulo inicial são dois dos exemplos mais destacáveis, e certamente o que mais interessa-nos aqui em virtude de suas consequências para o problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta.

Em verdade, ao longo do século xx, os trabalhos de lógicos e filósofos tais como Russell, Gödel e Tarski sobre a impredicatividade e a autoreferência certamente ajudaram a aproximar essas duas famílias de paradoxos com base no tipo de tratamento que pode ser dado a elas; embora a distinção seja ainda pertinente numa discussão mais ampla e analítica das origens e estruturas presentes nos mais diversos paradoxos. Para destacar um exemplo dessa aproximação, no trabalho desenvolvido por Tarski em teoria dos modelos, muitas noções semânticas passaram a ser definidas em termos conjuntísticos.

Não obstante, em comum ao tratamento aos paradoxos – seja de que tipo eles forem – dado por todos esses autores seminais encontra-se o paradigma clássico de rejeição de contradições com vista a evitar trivializações dedutivas. Nenhum dos grandes nomes citados acima pôs fortemente em questão a aversão a contradições. Questionar tal paradigma é parte constituinte do projeto desenvolvido ao longo deste trabalho.

***

Nos últimos passos tentei apresentar os traços gerais que marcam formalmente sistemas paraconsistentes e discuti a natureza lógica e filosófica de conceitos como o de *dialetheia*. Além disso, tentei também apresentar algumas razões que justificariam a abordagem paraconsistente do problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta. De agora em diante, pretendo apresentar alguns resultados que mostrem de que modo uma nova abordagem da generalidade absoluta – e, consequentemente, das quantificações irrestritas – pode ser viável a partir de uma teoria paraconsistente dos conjuntos. Obviamente, uma descrição pormenorizada da teoria paraconsistente dos conjuntos é não só impraticável dentro dos limites deste trabalho, mas também desnecessária, uma vez que temos excelentes livros textos que realizam essa tarefa com melhor competência do que a que eu poderia demonstrar aqui.[50] Meu objetivo é de caráter mais restrito e modesto. Uma vez que apresentei o paradoxo de Russell e o teorema de Cantor como dois dos principais resultados obtidos na teoria clássica dos conjuntos que inviabilizam os modelos ou domínios absolutos e, portanto, eliminam a possibilidade das quantificações irrestritas, pretendo me deter sobre esses dois resultados mostrando como eles podem ser controlados de maneira paraconsistente e se harmonizarem com o famigerado conjunto universo. Penso que uma discussão nesses termos pode revelar os caminhos básicos que podemos tomar para reabilitar paraconsistentemente a quantificação irrestrita e nosso discurso sobre totalidades sem restrições. Mesmo que posteriormente essa estratégia possa se revelar problemática para tratar o tópico deste trabalho, a tarefa de explorar tal estratégia pode derivar como subproduto interessantes resultados. Isso, por si só, vale o risco de tentar.

Nesse sentido, meu ponto aqui figura não só como uma proposta de abordagem de quantificações irrestritas, mas também uma indicação de um amplo programa de pesquisa a partir da qual podemos ainda obter uma série de resultados interessantes, dado que é inviável explorar todo o potencial lógico e filosófico deste programa nos limites estabelecidos aqui.

É importante destacar que esse programa filosófico de aspecto mais amplo que o estabelecido pelo tópico da quantificação irrestrita emerge na análise do estudo sobre uma teoria paraconsistente dos conjuntos na medida em que tal teoria é desenvolvida não só por interesses puramente formais, mas também motivada por questões epistemológicas formuladas tanto nas ciências formais quanto nas ciências empíricas. Uma teoria paraconsistente dos conjuntos figura como base para o tratamento semântico para objetos que não existem em sistemas clássicos, dado o fato de serem descritos como dotados de propriedades incompatíveis com o sistema no qual eles estão supostamente inseridos. No contexto específico da quantificação irrestrita, um exemplo claro de tal objeto contraditório é o conjunto universo. A existência do conjunto universo como parte do modelo para uma

[50] Minha referência primordial aqui é o livro de Da Costa *et. al.* (1998).

quantificação irrestrita só pode ser estabelecida em um contexto semântico e epistêmico mais geral do que aquele estabelecido pela semântica padrão de ZFC.

Igualmente importante para se ter em mente é a existência de sistemas paraconsistentes que, em seu poder de expressar as verdades da matemática básica, são tão fortes quanto ZFC, BNG ou os NF de Quine.[51] Isso não quer dizer necessariamente que a estrutura matemática do mundo seja contraditória. Isso é uma tese metafísica forte demais para ser derivada da mera possibilidade de um sistema inconsistente, porém não trivial. É basicamente para evitar essa tese que me posicionei anteriormente em favor de um dialeteísmo epistêmico e não um de natureza ontológica. Penso que somente uma investigação de caráter empírico poderia derivar uma tese mais forte sobre possíveis contradições no mundo.

Sem perder mais tempo e deixando agora de lado essa apresentação de aspectos gerais de teorias paraconsistentes dos conjuntos vamos direto ao tratamento paraconsistente dos paradoxos que inviabilizam em ZFC a quantificação irrestrita. Essa etapa deve fechar os objetivos estabelecidos na presente tese.

4.5 Uma abordagem paraconsistente do Paradoxo de Russell

> Não tem sido fácil de manter a doutrina de que quantificadores são sempre restritos, mas ela tem sido pensada como imposta a nós pela implacável lógica do paradoxo de Russell. No entanto, um olhar para a história da teoria dos conjuntos pós-*Principia* mostra que o paradoxo de Russell não é tão impiedoso quanto parece à primeira vista.
>
> Vann McGee

A melhor maneira de provar que algo existe é apresentando-o para que todos possam vê-lo. Até o presente momento falei muito sobre as possíveis vantagens em testar a hipótese de um tratamento paraconsistente da quantificação irrestrita por meio de uma abordagem não-clássica dos paradoxos associados a ela, mas pouco ou nenhum empenho dediquei em mostrar como de fato isso poderia ser realizado. É chegado o momento de esboçar os primeiros passos do percurso que pode ser trilhado para alcançar o objetivo em questão.

---

[51] Para uma discussão sobre interpretações paraconsistentes da matemática Cf. Mortensen, C. (1990). “Models for inconsistent and incomplete differential calculus”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 31, p. 274-285 e Mortensen, C. (1995). *Inconsistent Mathematics*. Kluwer. Nesses dois trabalhos é possível encontrar um esboço paraconsistente do cálculo diferencial e integral.

De maneira geral, a ideologia que predomina em meu argumento é que a manutenção do conjunto paradoxal de Russell dentro de uma teoria paraconsitente dos conjuntos pode tanto ser formalmente possível quanto filosoficamente interessante. Ao aceitar a definição básica do conjunto R de Russell, podemos extrair de tal definição importantes resultados, dentre eles, uma via possível para a admissão de modelos para quantificações irrestritas. No que segue, farei uso da teoria paraconsistente dos conjuntos apresentada em Da Costa *et. al.* (1998) e de alguns dos resultados que estão lá demonstrados – e os quais reapresento aqui, em grande parte, preservando a estrutura de demonstração presente na obra citada – para ilustrar o comportamento do conjunto de Russell em sistemas inconsistentes, porém não triviais. Portanto, não levanto a pretensão de originalidade ou autoria nas demonstrações apresentadas abaixo. Elas são reconstruídas aqui com a mera finalidade de fundamentar a proposta de uma abordagem paraconsistente da quantificação irrestrita. Vejamos como isso ocorre.

Em primeiro lugar, é importante relembrar que, por conjunto de Russell, estou nomeando o seguinte conjunto:

Definição 1: $\mathrm{R} = \{x \mid x \notin x\}$

Como já foi demonstrado no primeiro capítulo, a partir da definição intensional de R dada acima, podemos provar as seguintes sentenças:

(1) $\mathrm{R} \in \mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{R} \notin \mathrm{R}$

(2) $\mathrm{R} \in \mathrm{R} \wedge \mathrm{R} \notin \mathrm{R}$

prova: partimos de uma substituição de x por R na sentença $x \in \mathrm{R} \leftrightarrow x \notin x$, que é dada com base na *definição 1* apresentada acima. No caso onde a condição $x \notin x$ é aplicada ao próprio conjunto R, ou seja, na hipótese de que x=R, obtemos $\mathrm{R} \in \mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{R} \notin \mathrm{R}$. Consequentemente, se $\mathrm{R} \in \mathrm{R}$, com base em (1), temos que $\mathrm{R} \notin \mathrm{R}$. Se $\mathrm{R} \notin \mathrm{R}$, então, trivialmente, temos igualmente que $\mathrm{R} \notin \mathrm{R}$. De modo análogo podemos provar também que $\mathrm{R} \in \mathrm{R}$ e, finalmente, por intermédio da introdução da conjunção, podemos provar que $\mathrm{R} \in \mathrm{R} \wedge \mathrm{R} \notin \mathrm{R}$. ■

Continuando o argumento, assumindo o seguinte conjunto unitário $\{x\}$, segue-se pela definição extensional do conjunto em questão que:

(3) $y \in \{x\} \leftrightarrow y = x$

Com isso, obtemos que:

(4) $x \in \mathrm{R} \rightarrow \{x\} \in \mathrm{R}$

prova: supondo que $x \in R$, por definição, temos que $x \notin x$. Agora tomando o conjunto unitário formado por x, a saber, $\{x\}$, segue-se que $\{x\} \notin \{x\}$ ou $\{x\} \in \{x\}$. Caso $\{x\} \notin \{x\}$, então é satisfeita a condição estabelecida na *definição 1* e, portanto, $\{x\} \in R$. Por outro lado, caso $\{x\} \in \{x\}$, então $\{x\} = x$ e, com base na hipótese inicial de que $x \in R$, segue-se que $\{x\} \in R$. Logo, de todo modo segue-se que $\{x\} \in R$. ■

(5) $x, y \in R \rightarrow \{x, y\} \in R$

prova: suponha que $x \in R$ e $y \in R$. Além disso, de maneira similar a prova de (4) apresentada acima, temos que $\{x, y\} \notin \{x, y\}$ ou $\{x, y\} \in \{x, y\}$. Caso $\{x, y\} \notin \{x, y\}$, pela *definição 1*, temos que $\{x, y\} \in R$. Caso $\{x, y\} \in \{x, y\}$, então segue-se que $\{x, y\} = x$ ou $\{x, y\} = y$. Em ambos os casos, dada a suposição inicial da prova, $\{x, y\} \in R$. Logo, de todo o modo, temos que $\{x, y\} \in R$. ■

(6) $\{\{x, R\}\} \in R$.

prova: temos que $\{\{x, R\}\} \notin \{\{x, R\}\}$ ou $\{\{x, R\}\} \in \{\{x, R\}\}$. Caso $\{\{x, R\}\} \notin \{\{x, R\}\}$, pela *definição 1*, temos que $\{\{x, R\}\} \in R$. Caso $\{\{x, R\}\} \in \{\{x, R\}\}$, com base em (3), temos que $\{\{x, R\}\} = \{x, R\}$ e, consequentemente, $x = R = \{x, R\}$. Portanto, $x = R$ e, uma vez que $R \in R$, como está expresso em (2), com base em (5), segue-se que $\{x, R\} \in R$. Por fim, com base em (4), temos que $\{\{x, R\}\} \in R$. Logo, de todo o modo temos que $\{\{x, R\}\} \in R$. ■

Definição 2: $\cup C = \{x \mid x \in A \wedge A \in C\}$

Essa definição expressa a chamada grande união. Dada uma coleção C de conjuntos A, $\cup C$ tem como elementos tudo aquilo que for igualmente elemento de pelo menos um dos conjuntos A pertencentes à C.

(7) $\cup R = U$, onde $U = \{x \mid x = x\}$

prova: o caminho básico para demonstrar (7) é provar que para todo conjunto x, é verdade $x \in \cup R$. Para um conjunto x qualquer, suponhamos a seguinte hipótese (i): $\{x, R\} \notin \{x, R\}$. Pela *definição 1*, temos que $\{x, R\} \in R$. Além disso, pela definição 2, temos que $x \in \cup R$. De outro modo, supondo a hipótese contrária (ii): $\{x, R\} \in \{x, R\}$, temos que $\{x, R\} = x$ ou $\{x, R\} = R$. Em caso de $\{x, R\} = R$, segue-se que $x \in \cup R$. Em caso de $\{x, R\} = x$, segue-se que $\{\{x, R\}\} = \{x\}$ e, com base em (6), temos que $\{x\} \in R$. Por fim, temos que se $\{x\} \in R$, então $x \in \cup R$. Como o conjunto x é um conjunto escolhido arbitrariamente, temos portanto que para todo conjunto x, $x \in \cup R$.[52] ■

Com base na prova de (7) chegamos ao ponto de interesse fundamental deste trabalho. Se for possível a admissão de um "objeto contraditório" tal como o conjunto R de Russell controlando as contradições que são implicadas por ele, então é igualmente possível obter o famigerado conjunto universo necessário para expressar o domínio de quantificações irrestritas.

Podemos prosseguir um pouco mais na nossa série de provas ao introduzir mais uma definição:

***Definição 3*:** $\wp(x)$ expressa o *conjunto das partes* de x.

Daí, segue-se que,

(8) $\ldots \subset \wp(\wp(R)) \subset \wp(R) \subset R$

prova: dado um conjunto x qualquer, se $x \in \wp(R)$, então $x \subset R$. Por terceiro excluído, temos que $x \in x$ ou $x \notin x$. Se $x \notin x$, pela *definição 1*, então $x \in R$. Se $x \in x$, dado que $x \subset R$, temos que $x \in R$. Portanto, $\wp(R) \in R$. Nesse estágio, continuamos a prova do seguinte modo. Se $x \in \wp(\wp(R))$, então $x \subset \wp(R)$. Pelo resultado a primeira parte da prova temos então que $x \subset R$ e, consequentemente, $x \in \wp(R)$. Desse modo, $\wp(\wp(R)) \subset \wp(R) \subset R$. Continuando a aplicar reiteradas vezes esse mesmo raciocínio obtêm-se o teorema (8).[53] ■

A prova de (8) estabelece no seio de uma teoria paraconsistente dos conjuntos uma importante relação entre a operação $\wp$ de potência de um conjunto – fundamental para a formulação do teorema de Cantor – e o conjunto R de Russell. Se recuperarmos ainda a informação destacada em (7) de que podemos obter a partir da grande união do conjunto R o conjunto universo necessário para quantificações irrestritas, então temos aqui um relevante meio de lidarmos conjuntamente com a operação $\wp$ de potência de conjuntos e o conjunto universo. Com isso, temos encaminhado os primeiros passos para um tratamento paraconsistente tanto do paradoxo de Russell quanto do teorema de Cantor.

***

[52] Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em Arruda & Batens (1982).
[53] A presente reconstrução da demonstração do teorema (8) é baseada em Arruda (1980).

A ideia que subjaz à abordagem não clássica da quantificação irrestrita parece ser a de que tais quantificações figuram como casos limites da quantificação tomada de maneira geral e, por isso, estão além do limite estabelecido pelo tratamento clássico da semântica padrão dos quantificadores. Em verdade, essa situação não representa um caso isolado; pelo contrário. Outros níveis de descrições mais fundamentais da realidade parecem oferecer a mesma resistência à lógica clássica, e. g., os vários tipos de indeterminações descritas pela física quântica e alguns problemas práticos em ciência da computação. Em nenhum desses casos, a resistência a um tratamento clássico parece ser um argumento razoável em favor da negação do fenômeno.

É importante ressaltar aqui que expor a defesa do uso de uma lógica paraconsistente para tratar o problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta não implica atribuir um demérito ao trabalho de filósofos e matemáticos como Cantor e Russell, bem como de todos os outros que, assim como estes, pensaram ter derivado de resultados lógicos a inconsistência de um discurso sobre uma totalidade absolutamente abrangente. Sem dúvida alguma, eles fizeram o possível com as ferramentas técnicas que estavam disponíveis até então. No entanto, os dialeteístas e lógicos paraconsistentes em geral defendem que estamos atualmente diante de um cenário relevantemente diferente e não podemos simplesmente ignorar esse fato. Eles poderiam parafrasear Newton e afirmar que, se hoje podemos ver mais longe é porque estamos sobre ombros de gigantes; e, para esses teóricos, a lógica e as teorias paraconsistentes dos conjuntos são os gigantes em questão. Eles afirmam que, se possuímos hoje mecanismos de análise que possibilita-nos pensar boas alternativas muito além dos limites das nossas intuições elementares, não faz sentido algum não usá-las. Obviamente, esse movimento não representa uma recusa completa das intuições básicas. Nossas intuições são sempre importantes guias na construção de uma filosofia sólida, pois elas estão em conexão direta com nosso senso básico de realidade. Não obstante, as diversas concepções não clássicas, hoje tão seriamente trabalhadas, sustentam conjuntamente que manter intuições quando elas limitam nosso poder de ampliar a compreensão da estrutura profunda dessa mesma realidade não constitui uma atitude filosófica, mas sim uma atitude dogmática.

Em favor dessa postura, pode-se alegar que o ato de rever e romper com nossas intuições já cumpriu anteriormente papel fundamental na passagem da concepção ingênua para uma teoria axiomática dos conjuntos, bem como da geometria euclidiana às não-euclidianas. Em 1826, ao propor um sistema contendo os quatro primeiros postulados de Euclides e substituindo o quinto postulado – o famigerado postulado das paralelas – por um alternativo, Lobatchevski criou uma instância do que posteriormente ficou conhecido como geometria não-euclidiana. Obviamente, tais sistemas possuem aspectos relevantemente diferentes com relação ao sistema de Euclides. Na geometria de Lobatchevski, a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a dois ângulos retos. Somente em triângulos consideravelmente pequenos a soma dos ângulos internos se aproximaria de 180°. De maneira independente, em 1854 Riemann obteve também um sistema geométrico alternativo ao de Euclides onde o que ele chamou de grau de curvatura é descrito enquanto o grau de afastamento das propriedades de figuras geométricas com relação às suas equivalentes euclidianas. Sendo todos esses sistemas geométricos internamente consistentes – embora incompatíveis entre si – e, alguns deles, posteriormente marcados também por um satisfatório nível de aplicabilidade, ficou difícil sustentar a tese de que a geometria Euclidiana é a única forma legítima de descrever propriedades ditas "espaciais". Em verdade, de um ponto de vista filosófico, uma das grandes contribuições desses sistemas alternativos é ter alforriado a noção de espaço das nossas intuições espaciais mais imediatas e fazê-la depender exclusivamente de construções axiomáticas puramente formais.

De certo modo, penso que algo similar ocorre na proposta de uma abordagem paraconsistente da quantificação irrestrita na medida em que nós libertamos a noção de generalidade absoluta da hegemonia clássica marcada pela semântica padrão dos quantificadores. Sendo assim, uma nova revisão da teoria dos conjuntos poderia abrir caminhos para o tratamento não só da quantificação irrestrita, mas de inúmeros outros tópicos filosóficos.

Obviamente, a defesa do uso de uma abordagem não clássica para o tratamento de um problema que vem já há algum tempo desafiando a ortodoxia de alguns filósofos e lógicos clássicos sem que eles tenham destacável sucesso em enfrentá-lo nem sempre é vista com bons olhos. Em verdade, nenhuma teoria deveria estar blindada contra críticas. No entanto, alguns dialeteístas e lógicos paraconsistentes afirmam que uma parte relevante das objeções às suas teorias e pressupostos provém muito mais da pré-indisposição em aceitar que a lógica clássica possa ser mais uma entre as várias lógicas. Os exemplos as vezes são cômicos, as vezes constrangedores. Seguindo a primeira linha de crítica, Shapiro e Wright (2006: p. 293) afirmam espirituosamente e ironicamente que não há nenhum custo em endossar o dialeteísmo, a menos que alguém duvide das vantagens de e/ou vacile em aceitar uma contradição.[54] De maneira igualmente jocosa e um tanto mais deselegante, Williamson (2006: p. 387) refere-se a um possível êxito da abordagem dialeteísta ao problema da generalidade absoluta como "um destino pior que a morte". Nesse contexto, me parece sensata a afirmação de Priest (2013: p. 1270) de que "é triste ver bons filósofos confundir humor com argumento racional".

Ao longo da história, temos bons exemplos de que nossa resistência em pensar determinados problemas fora do procedimento padrão rendeu algumas previsões falhas acerca do desenvolvimento científico. Como uma pequena mostra disso temos as já mencionadas derrocadas das supostas hegemonias do espaço euclidiano e da mecânica clássica newtoniana. No que diz respeito à lógica, os racionalistas modernos sempre estiveram na contracorrente das propostas de revisão dos princípios clássicos, para os quais tais princípios eram entendidos como necessários e *a priori*. Mesmo Kant, enquanto um idealista epistêmico, caiu fortemente na armadilha de tomar a lógica aristotélica como um edifício teórico pronto e cuja estrutura não é passível de revisão. As declarações kantianas sobre o futuro da lógica ficaram marcadas como gafes históricas dada a profunda revolução disparada posteriormente pela álgebra booleana, pelo cálculo de predicados de Frege e, sobretudo, pela explosão de sistemas lógicos não clássicos desenvolvidos ao longo do século XX. Como exemplo dessas gafes temos a famosa passagem do prefácio à segunda edição da *Crítica da Razão Pura*, onde Kant afirma:

[54] Para ser justo, Wright (1980: p. 298, 303, 310) apresenta também algumas objeções sérias aos sistemas paraconsistentes, mas nenhuma delas parecem de fato decisivas. Pelo contrário, elas são facilmente debeladas pelos lógicos paraconsistentes. De acordo com Wright, não há como garantir que, em última instância, tais sistemas não possam permitir derivar sentenças falsas a partir de premissas verdadeiras. No entanto, não há fundamento de sustentação para tal crítica, pois existem inúmeros resultados onde são estabelecidas semânticas "corretas" para tais sistemas. Além disso, Wright alega que os sistemas paraconsistentes não são capazes de estabelecer estruturas que sejam razoáveis a ponto de serem levadas em consideração, sejam tais estruturas reais – dotadas de correspondência no mundo – ou meramente possíveis. Não obstante, Wright assim pensa, pois ele exclui de antemão a possibilidade da existência de estruturas inconsistentes, mas não triviais.

> Que a lógica tenha seguido desde os tempos mais remotos esse caminho seguro depreende-se do fato de não ter podido desde Aristóteles dar nenhum passo atrás (...). É ainda digno de nota que também ela até agora também não tenha podido dar nenhum passo adiante, parecendo, portanto, ao que tudo indica, completa e acabada. (Kant, 1781: p. 35)

Essa gafe é ainda reeditada por Kant em seu opúsculo *Lógica*:

> Há poucas ciências capazes de atingir uma situação estável, onde não sofram mais alterações. Entre essas encontram-se a lógica e a metafísica. Aristóteles não deixou de lado nenhum aspecto do entendimento; nisso somos apenas mais exatos, metódicos e ordenados (...) Em nossos dias nenhum lógico granjeou fama, mas também não precisamos de invenções novas para a lógica, porque esta contém tão somente a forma do pensamento. (Kant, 1800: p.38)

Dado o contexto acima, o presente capítulo figura como uma tentativa de apresentar os primeiros passos na direção da superação de alguns preconceitos em torno da abordagem não clássica do problema da quantificação irrestrita e o tratamento formal da generalidade absoluta. Esse é um ponto de partida de um projeto que visa olhar seriamente para a questão a partir de uma perspectiva não clássica. De algum modo, penso que essa mudança de perspectiva, tal como a defendo, possui uma motivação pragmática em resolver o dilema de Grim. Se o uso da lógica clássica inviabiliza o tratamento formal de um discurso sobre a generalidade absoluta, então precisamos rever nossos mecanismos formais de análise do discurso.

Eis aqui um programa de estudos que, quando levado às últimas consequências, certamente constitui uma agenda filosófica de grande fôlego. Ele mexe não só com o próprio tópico da quantificação irrestrita e generalidade absoluta, mas com um conjunto de campos reivindicados em seu tratamento: teoria dos conjuntos, metafísica, teoria do conhecimento, dentre outros. Nesse sentido, ele é tanto um projeto de aspecto lógico quanto filosófico.

5
Considerações Finais

Um último esclarecimento de alguns pontos pode ser de grande ajuda para chegar a uma síntese geral do cenário descrito nas páginas anteriores. Da forma como penso, o problema da quantificação irrestrita parece gerar um dilema fundamental, assim como ocorre com relação a diversos casos limites presentes nas ciências formais, nas ciências naturais ou em filosofia. No caso em questão, o dilema pode ser exposto da seguinte maneira: ou preservamos a lógica clássica e assumimos de vez a ilegitimidade da generalidade absoluta, bem como nossa incapacidade de lidar formalmente com quantificações irrestritas, ou assumimos uma abordagem não clássica que viabiliza a generalidade absoluta, mas possui o alto preço de suspender o princípio de não-contradição. Penso que, sendo a quantificação irrestrita um caso limite do procedimento formal de quantificar, a questão de sua legitimidade não parece abrir espaço para uma resposta de caráter diplomático. Podemos insistir que: ou bem assumimos a posição contrária à metafísica clássica ao defender a existência de um universo fatalmente incompleto – para usar a terminologia de Grim –, ou bem assumimos a não universalidade e não prioridade da lógica clássica e todas as consequências que isso carrega. Como foi dito anteriormente, seja qual decisão tomarmos, o dilema de Grim resulta sempre num jogo de perdas e ganhos. Obviamente, se optamos por uma abordagem não clássica dos problemas, os caminhos pelos quais podemos obtê-las são diversos. Os caminhos da paraconsistência e do dialeteísmo esboçados aqui são apenas alguns dos caminhos possíveis. Não pretendo com isso afirmar nenhuma prioridade lógica ou metafisica desta proposta com relação a outras. O que pretendo aqui é muito mais um teste de possibilidade. É possível tratar o problema da quantificação irrestrita de modo paraconsistente e temos boas e filosóficas razões para testá-lo.

De maneira mais geral, tendo a pensar que o caminho que podemos traçar para solucionar o dilema apresentado por Grim com respeito à quantificação irrestrita parece envolver uma decisão de natureza muito mais filosófica do que puramente formal. Por exemplo, o modo como lemos filosoficamente a lógica clássica é certamente um fator determinante para o desenvolvimento de uma resposta ao problema da quantificação irrestrita. Se pensamos nela ontologicamente como expressando a estrutura última da realidade, abrir espaço para uma análise não clássica do problema seria o mesmo que abdicar da tarefa da busca pela verdade. Por outro lado, se pensamos na lógica clássica como um sistema importante, mas incapaz de captar todos os aspectos do real, então podemos encarar uma abordagem não clássica como uma possibilidade efetiva de expandirmos nosso poder de compreensão do que existe.

Me parece também bastante claro que, por trás do peso que os paradoxos dos conjuntos conferem à legitimidade da quantificação irrestrita, encontra-se uma série de convicções metafísicas, tais como a reificação platonista dos conjuntos, ou seja, a ideia de que conjuntos são objetos abstratos. Nesse mesmo contexto, há ainda uma leitura do procedimento de aplicação da extensibilidade indefinida dos conjuntos como revelando novas entidades e expandindo indefinidamente o domínio do que existe. Um trabalho filosófico sobre a quantificação irrestrita e a generalidade absoluta não pode se eximir de um tratamento de tais questões que estão para além de decisões puramente técnicas.

Sobre os aspectos metodológicos e de estratégia argumentativa, é importante reconhecer aqui a existência de algumas lacunas presentes nesta tese no que diz respeito à proposta de uma abordagem não clássica da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta. Certamente, para que meu projeto seja executado integralmente e com sucesso, é necessário, dentre outras coisas, uma apresentação detalhada de uma teoria paraconsistente dos conjuntos. Obviamente, uma tal empresa está além dos limites impostos por um trabalho de doutorado, com todas suas restrições temporais e estruturais. De antemão, entendo que essas lacunas não constituem uma deficiência do meu trabalho, tendo em vista que esses resultados já foram obtidos e publicados anteriormente por lógicos de reconhecida competência. Foi exatamente alguns desses trabalhos que inspiraram a abordagem que desenvolvo aqui. Em grande parte, por isso, tentei me concentrar apenas nos resultados de uma teoria paraconsistente dos conjuntos que digam respeito diretamente aos paradoxos que parecem inviabilizar a quantificação irrestrita e a generalidade absoluta no contexto da semântica padrão.

Uma abordagem paraconsistente do problema da quantificação irrestrita é algo relativamente inovador. Um exemplo claro disso é o fato de que a coletânea *Absolute Generality*, publicada em 2006 por Rayo e Uzquiano unindo esforços de compreensão do problema por parte de muitos dos maiores teóricos do tópico, não contém nenhum artigo com base nesta abordagem. É natural que uma abordagem com essa densidade não se esgote em cerca de duzentas páginas, mas, antes, indique um frutífero programa de pesquisa que passa não só pelo estudo sobre a quantificação, mas também sobre paradoxos, contradições, a metafísica dos conjuntos, regresso *ad infinitum*, dentre outros. O objetivo e o sucesso deste trabalho passam, em grande parte, pela tentativa de esboçar toda a riqueza que pode ser derivada da abordagem em questão.

Tendo discutido inúmeras questões associadas não só à semântica padrão dos quantificadores, mas, especialmente, aquelas que dizem respeito de maneira direta à quantificação irrestrita e à generalidade absoluta, à guisa de conclusão, posso agora apresentar de maneira sintética minha posição até o presente momento. Penso que, procedendo assim, tornarei mais claro o que eventualmente tenha passado desapercebido pelo leitor em um outro momento da leitura do presente trabalho. A melhor maneira de fazer isso objetivamente é apresentando uma lista de um conjunto básico de teses:

1. O problema da quantificação irrestrita pode ser entendido como um problema de impossibilidade de síntese, ou ainda, o que chamei de *progresso infinito*. Essa é uma consequência das correlações existentes entre tais quantificações e a estrutura de argumentos por regresso ao infinito. De certo modo, esse resultado expressa o âmago da concepção iterativa de conjunto presente em ZFC. Ele também pode ser reproduzido em todo conceito que envolva extensibilidade indefinida. Nesse contexto, paradoxos como os de Russell, Burali-Forti, dentre outros, podem figurar como provas da extensibilidade indefinida dos conceitos que eles tematizam: conjuntos, números ordinais, etc. A discussão sobre a totalidade de itens que caem sob esses conceitos está diretamente ligada aos mesmos argumentos envolvendo progressos infinitos.
2. A despeito dos argumentos de caráter lógico levantados contra as quantificações irrestritas, a ocorrência na nossa linguagem do discurso sobre a generalidade absoluta e o modo como ela é pressuposta em nossas teorias gerais de mundo marcam conjuntamente uma imposição do fenômeno. Não podemos ignorar o fenômeno da generalidade absoluta, mesmo que nossos mecanismos formais não estejam aptos a

lidar tecnicamente com ele. A defesa da imposição do fenômeno expressa uma das motivações filosóficas a partir da qual decido o dilema de Grim em favor de uma abordagem não clássica do problema da quantificação irrestrita.

3. Concordo com Grim que os obstáculos impostos pelos resultados de caráter formal contra a quantificação irrestrita parecem inviabilizar de maneira decisiva a ocorrência de quantificações irrestritas nos quadros da lógica clássica. Isso basicamente impõe o dilema entre ficar com a lógica clássica e abdicar do nosso discurso sobre uma generalidade absoluta ou manter a força e credibilidade desse discurso e se aventurar para além das fronteiras dessa mesma lógica clássica estando disposto a assumir as consequências que essa decisão implica. Em resumo, o dilema de Grim me parece real e substancial.
4. Dada a imposição do fenômeno da generalidade absoluta e do nosso discurso sobre tal generalidade, minha sugestão é que o dilema de Grim seja decidido em favor das quantificações irrestritas e do uso de sistemas não clássicos para a obtenção de modelos formais para tais quantificações.
5. A abordagem não clássica que proponho testar é aquela estabelecida formalmente pela lógica paraconsistente e filosoficamente pelo que chamei de *dialeteísmo anti-realista*. Nesse sentido, defendo que, tanto no nosso discurso sobre a totalidade da realidade enquanto produto de nossos esquemas conceituais, quanto nas nossas descrições – filosóficas ou científicas – sobre os constituintes últimos dessa mesma realidade, estamos inevitavelmente envolvidos com contradições. No entanto, é importante destacar que minha intenção não foi a de executar em detalhes esse projeto paraconsistente de tratamento da quantificação irrestrita. Realizar essa empresa certamente estenderia o presente trabalho além de seus limites. Essa abordagem figura mais como uma expressão de minha posição a respeito do dilema de Grim. Nesse sentido, o tratamento paraconsistente ocorre em meu trabalho como uma sugestão a ser testada, ou ainda, como uma proposta de programa de estudo.

No que diz respeito a esse último ponto elencado acima, eu assumi ao longo do trabalho uma clara influência kantiana, embora essa influência tenha sido modelada de maneira a não me comprometer com algum tipo de idealismo psicologista. A despeito de algumas discordâncias pontuais, penso que Kant havia percebido algo fundamental acerca de nossas afirmações sobre a totalidade da realidade. Não penso que seja por acaso que uma das ideias regulativas propostas por Kant na Dialética Transcendental de sua *Crítica da Razão Pura* seja exatamente a de *mundo* enquanto totalidade dos objetos da experiência. Há na obra magna de Kant o mesmo problema em lidar com a generalidade absoluta, embora ele seja formulado a partir de uma perspectiva consideravelmente distinta do debate sobre a quantificação irrestrita. Na terminologia kantiana, a cosmologia é uma imposição da Razão e não um produto do Entendimento. Não há nada no Entendimento capaz de produzir um conceito de mundo. Com isso, Kant parece afirmar alguma limitação sobre nosso trato com a totalidade da realidade. Para mim, há um paralelo entre os resultados de Kant e a abordagem proposta aqui ao problema da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta. O fato de o Entendimento ser incapaz de produzir, a partir da experiência empírica, um conceito de mundo enquanto totalidade da própria experiência leva Kant a saltar do nível dos conceitos para o nível das ideias regulativas produzidas pela Razão pura. De modo análogo, a impossibilidade de lidar formalmente com o discurso sobre a totalidade da realidade – nossa famigerada generalidade absoluta – convida-nos a passar da lógica clássica para uma abordagem não-clássica do problema. Em ambos os casos, o não enfrentamento do problema a partir de uma superação de nossos limites – seja os limites do Entendimento em Kant, seja os limites da lógica clássica para a quantificação irrestrita – conduz a impasses fundamentais, a saber, os paralogismos e antinomias da razão em Kant, e os paradoxos na lógica clássica e o consequente comprometimento com um universo aberto e incompleto descrito por Grim.

Ainda sobre essas "notas kantianas", há algo destacável aqui. Ao longo do presente trabalho eu tentei chamar várias vezes atenção para o fato de que quantificações irrestritas são indispensáveis ao programa de formalização da metafísica. Também apelei para intuições metafísicas na hora de justificar o que chamei de imposição do fenômeno da generalidade absoluta. No entanto, se minha sugestão de enfrentamento do problema da quantificação irrestrita via teoria paraconsistente dos conjuntos – e, fundamentalmente, via o dialeteísmo anti-realista – for de fato nossa melhor chance admitir modelos para tais quantificações, então uma importante consequência metafísica se segue, a saber, a única metafísica possível é, não a que foi estabelecida nos moldes clássico por Platão e Aristóteles, mas uma de espírito mais kantiano. Se abandonarmos a lógica clássica para salvar as quantificações irrestritas e algum modo de fazer metafísica, essa metafísica que nos sobra certamente não será aquela que pretende descrever a estrutura de uma realidade em-si, mas apenas uma realidade tal como nossos esquemas conceituais são capazes de modelar. Embora essa afirmação precise de uma melhor explanação, eu estou convencido de que o anti-realismo epistêmico é a melhor metafísica que conseguimos ter. Uma avaliação mais detalhada das posições metafísicas que assumo aqui caminham muito além dos objetivos iniciais deste trabalho e, por isso, não me sinto negligente por não oferecer uma detalhada explanação. Não obstante, mencionar tais consequências ajuda a destacar o potencial filosófico do que foi proposto acima.

Sobre a opção pelo uso da lógica paraconsistente, como toda escolha em filosofia, ela envolve perdas e ganhos. Sobre as perdas, é de amplo conhecimento que a paraconsistência nos obriga a rever nosso comportamento com relação a alguns operadores lógicos e às regras de inferências da lógica clássica. Mas o que falar dos ganhos? Precisamos certamente falar sobre ganhos, uma vez que minha escolha pela paraconsistência só se justifica diante deles. Os sistemas paraconsistentes me parecem ter o apelo em lidar com casos limites que vão além do debate sobre a legitimidade da quantificação irrestrita. Isso inclui desde o tratamento formal de teorias científicas que descrevem a realidade em níveis fundamentais e distantes da nossa compreensão intuitiva e cotidiana do mundo, como ocorre na interpretação de fenômenos descritos pela física quântica, à análise de alguns problemas formulados pela teologia e filosofia da religião sobre a natureza divina, livre-arbítrio, etc. Isso de modo algum pode ser considerado pouca coisa.

De minha parte, estou convicto de que há ao longo das páginas deste trabalho não uma apresentação detalhada de um problema lógico e filosófico que pretenda esgotar o debate. Dado o emaranhado de conexões que o tópico da quantificação irrestrita apresenta, bem como o potencial que essas conexões carregam, prefiro pensar o presente trabalho com um programa de estudos a ser executado muito além dos limites de uma tese doutorado. Espero que, ao menos no que diz respeito ao desafio de realizar uma avaliação crítica do debate sobre a legitimidade da quantificação irrestrita e da generalidade absoluta, eu tenha conseguido esboçar um quadro geral que dê conta do estado da arte e que seja capaz de indicar novas perspectivas.

6
Referências Bibliográficas

ARRUDA, A. I. (1980) **"A survey of paraconsistent logic"**. *in* ARRUDA & CHUAQUI & DA COSTA (ed.) (1980), pp. 1-41.

ARRUDA, A. I. & BATENS, D. (1982). **"Russell's set versus the universal set in paraconsistent set theory"**, *Logique et Analyse* **98**, p. 121-133.

ARRUDA, A. I. & CHUAQUI, R. & DA COSTA, N. (ed.) (1980) **Mathematical logic in latin america**. Amsterdam: North-Holland.

BARWISE, J. & COOPER, R. (1981) **"Generalized quantifiers and natural language"**. In: *Linguistics and Philosophy*, **4**, pp. 159-219.

BAYS, Thimothy. (2014) **"Skolem's Paradox"**. in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponível *online* em: http://plato.stanford.edu/entries/paradox-skolem/ Último acesso em: 27/11/2014.

BENACERRAF, Paul & PUTNAM, Hilary (1983) **Philosophy of Mathematics**. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press.

BRANQUINHO, João (et al.) (2006) **Enciclopédia de termos lógico-filosóficos**. São Paulo: Martins Fontes.

BELNA, Jean-Pierre. (2011) **Cantor**. São Paulo: Estação Liberdade.

BELNAP, N. (1962) **"Tonk, Plonk, and Plink."** *Analysis* 22: 130–134.

BOOLOS, George. (1998a) **"The iterative conception of set"**, *in* BOOLOS (1998b), pp.13-29.

________. (1998b) **Logic, Logic and Logic**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

________. (1998c) **"Iteration again"**. In: BOOLOS (1998b), pp. 88-104.

BOOLOS, G.; BRUGESS, J.; JEFRREY, R. (2007) **Computability and Logic**. Cambridge: Cambridge University Press.

BROWN, Bryson. (2002) **"On Paraconsistency"**, *in* JACQUETTE (2002).

BUENO, Otávio & LINNEBO, Øystein (ed.) (2009) **New waves in the philosophy of mathematics**. London: Palgrave Macmillan.

BURGESS, John. (2004) **"E Pluribus Unum: Plural Logic and Set Theory",** *Philosophia Mathematica (3)* 12, 13–221.

CANTOR, Georg. (1886) **Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die aktualunendlichen Zahlen**. *Bihang Till Koniglen Svenska Ventenskaps Akademiens Handligar* **11**(19), 1-10.

________. (1899) **"Letter to Dedekind"**, in van HEIJENOORT (1967a).

CARNAP, Rudolf. (1950) **"Empiricism, semantics, and ontology"**, *Analysis* **4**: 20-40.

CARTWRIGHT, Richard. (1994) **"Speaking of Everything"**. *Noûs* **28**, pp. 1-20.

COHEN, Paul. (1966) **Set theory and the continuum hypothesis**. New York: Dover Publications.

Da COSTA, Newton. (1963) **Sistemas formais inconsistentes**. Tese de Cátedra, UFPR. Curitiba: UFPR, 1993.

_________. (1982) **"The philosophical import of paraconsistent logic"**, *The Journal of Non-Classical Logic*, v.1, n.1, pp. 1-19.

Da COSTA, N; BEZIEAU, J-Y; BUENO, O. (1998) **Elementos de teoria paraconsistente dos conjuntos**. Coleção CLE, vol. 23. Campinas: UNICAMP.

DIEVENEY, Patrick. (2013) **"Anything and Everything"**, *Erkenntnis* **78**, pp. 119–140.

__________. (2014) **"Quantification and Metaphysical Discourse"**, *Theoria* **80**, pp. 292-318.

DUMMETT, Michael. (1963) **"The philosophical significance of Gödel's theorem"**. In: DUMMETT, 1978.

___________. (1978) **Truth and others enigmas**. Cambridge: Harvard University Press.

___________. (1981) **Frege: Philosophy of Language**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

___________. (1991) **Frege: Philosophy of Mathematics**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

___________. (1993), **The Seas of Language**. Oxford: Oxford University Press.

FEFERMAN, Solomon. (2005) **"Predicativity"**. *in* SHAPIRO (2005).

FIELD, Hartry (2008) **Saving truth from paradox**. Oxford: Oxford University Press.

FINE, Kit. (2006) **"Relatively unrestricted quantification"**, in: RAYO & UZQUIANO, 2006, pp. 20-44.

FORSTER, T. E. (1995) **Set theory with a universal set: exploring an untyped universe**. 2nd Edition. Oxford: Clarendon Press.

FREGE, Gottlob. (1884) **The foundations of arithmetic**. Trad. por J. L. Austin. Evanston: Northwestern University Press, 1980.

______. (1902) **"Letter to Russell"**. *in* van HEIJENOORT (1967a), pp. 126-8.

GEACH, Peter. (1980) **Reference and Generality**. 3rd Edition. London: Cornell University Press.

GENTZEN, G. (1969) **The Collected Papers of Gerhard Gentzen**. Amsterdam: North Holland.

GLANDZBERG, Michael. (2004) **"Quantification and Realism"**, *Philosophy and Phenomenological Research* **69**, 541–572.

_____________. (2006) **"Context and Unrestricted Quantification"**, in: RAYO & UZQUIANO, 2006, pp. 45–74.

GOBLE, Lou (Ed.) (2001) **The Blackwell Guide to Philosophical Logic**. Oxford: Blackwell Publishing.

GOODMAN, Nelson. (1983) **Fact, fiction, and forecast**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

GRATTON, Claude. (1997) **“What is an infinite regress argument?”** *Informal Logic* **18**, Nº 2 & 3, pp. 203-224.

GRIFFIN, Nicholas. (2003) **The Cambridge Companion to Bertrand Russell**. Cambridge: Cambridge University Press.

GRIM, Patrick. (1984) **“There is no set of all truths.”** *Analysis* **44**, 206-208.

______. (1991) **The incomplete universe**. Cambridge, Mass.: MIT Press.

HAACK, Susan (2002) **Filosofia das Lógicas**. São Paulo: UNESP.

HALLETT, Michael (1984) **Cantorian set theory and limitation of size**. Oxford: Oxford University Press.

HELLMAN, Geoffrey. (2006) **“Against ‘Absolutely Everything’!”**, in: RAYO & UZQUIANO, 2006, pp. 75–97.

HUNTER, Geoffrey (1971) **Metalogic**. Los Angeles: University of California Press.

IMAGUIRE, Guido (*et al*) (2007) **Metafísica contemporânea**. Petrópolis: Editora Vozes.

JACQUETTE, Dale (ed.). (2002) **A companion to philosophical logic**. Oxford: Blackwell Publishing.

JAŚKOWSKI, Stanisław. (1948) **Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych**. Studia Societatis Scientiarun Torunesis, Sectio A, I(5):57-77, 1948. Traduzido para o inglês como 'A propositional calculus for inconsistent deductive systems' *in* Logic and Logic Philoshopy, 7:35-56, 1999, Proceedings of the Stanislaw Jaśkowski's Memorial Symposium, held in Toruń, Poland, July 1998.

KANT, Immanuel. (1781) **Crítica da razão pura**. *in: Kant, Col. Os Pensadores*. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

_____. (1800) **Lógica**. Tad. de Guido Antônio de Almeida. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1992.

KLEMENT, Kevin C. (2010) **“Russell, His Paradox, and Cantor’s Theorem: Part I”**. *Philosophical Compass* 5/1, 16-28.

KRIPKE, Saul. (1975) **“Outline of a theory of truth”**, *The Journal of Philosophy* **72**, pp. 690-716.

LAVINE, Shaughan. (2000) **“Quantification and Ontology”**, *Synthese* **124**: 1–43.

_______. (2006) **“Something about everything: universal quantification in the universal sense of universal quantification”**, *in* RAYO & UZQUIANO, 2006, pp. 98–148.

LEJEWSKI, Czesław. (1954) **“Logic and Existence”**, *British Journal for the Philosophy of Science* **5**, pp. 104–119.

LEWIS, David (1973) **Counterfactuals**. Oxford: Blacwell.

______. (1984) **On the plurality of worlds**. Oxford: Blackwell.

______. (1984b) **"Putnam's Paradox"**. *The Australasian Journal of Philosophy* **62**, 221-36.

______. (1991) **Parts of classes**. Oxford: Blackwell.

LUSCHEI, Eugene. (1962) **The Logical Systems of Lesniewski**. Amsterdam: North-Holland.

MARCOS, João. (1999) **Semântica de traduções possíveis**. Dissertação de mestrado. Campinas: UNICAMP. Disponível *online* em: www.cle.unicamp.br/pub/thesis/j.marcos/ Último acesso em: 15/02/2015.

MARCUS, Ruth B. (1962) **"Interpreting Quantification"**, *Inquiry* **5**: pp. 252–259.

McFARLANE, John (2009) **"Logical Constants"**. *in*: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponível *online* em: http://plato.stanford.edu/entries/logical-constants/. Último acesso: 13/11/2014.

McGEE, Vann. (2000) **"Everything"**, *in* SHER, G. & TIESZEN, R. (2000), pp. 54–78.

______. (2006) **"There's a rule for everything"**, in: RAYO & UZQUIANO, 2006, pp. 180-202.

NEALE, Stephen. (1990) *Descriptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press/Bradford Books.

NELSON, D. (1959) **"Negation and separation of concepts in constructive systems"**, *in* A. Heyting, (ed.), *Constructivity in Mathematics, Proceedings of the Colloquium held in Amsterdam*, NL, 1957, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, pp. 208-225. Amsterdam: North-Holland.

PARSONS, Charles (2006) **"The problem of absolute universality"**, in: RAYO & UZQUIANO, 2006, pp. 203-219.

PARSONS, Terence. (1980) **Nonexistent Objects**. London: Yale University Press.

PONTES, André N. (2013) **"A proposta de uma teoria geral de princípios de abstração: uma contribuição à fundamentação da aritmética"**, *Trans/Form/Ação*, Marília, v. 36, n. 2, p. 179-194.

POTTER, Michael. (2004) **Set theory and its philosophy**. Oxford; Oxford University Press.

PRIEST, Graham. (2002) **Beyond the Limits of Thought**. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press.

______. (2006) **In contradiction**. 2nd Edition. Oxford: Oxford University Press.

______. (2008) **An introduction to non-classical logic**. 2nd Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

______. (2013) **"Indefinite extensibility — Dialetheic style"**, *Studia Logica* **101**, pp. 1263-1275.

PRIEST, Graham & BERTO, Francesco (2013) **"Dialetheism"**, in: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponível *online* em: http://plato.stanford.edu/entries/dialetheism/. Último acesso em: 13/11/2014.

PUTNAM, Hilary (1980) **"Models and reality"**, in: BENACERRAF & PUTNAM (1983), pp. 421-444.

________. (1987) **The Many faces of realism**. Open Court, La Sale, IL.

QUINE, W. v. O. (1940). **Mathematical Logic**. 2nd revised edition. New York: Harper & Row, 1962.

______. (1953) **From a logical point of view**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

______. (1969) **Ontological Relativity and Others Essays**. New York: Columbia University Press.

RAYO, Agustín & UZQUIANO, Gabriel (2006) **Absolute Generality**. Oxford: Oxford University Press.

RESCHER, Nicholas & GRIM, Patrick (2008) **"Plenum Theory"**, *Noûs* **42**(3), pp. 422-439.

RUSSELL, Bertrand. (1902) **"Letter to Frege"**. *in* van HEIJENOORT (1967a), pp. 124-5.

________. (1903) **The Principles of Mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press.

________. (1907) **"On some difficulties in the theory of the transfinite numbers and order types"**. in *Proceedings of the London Mathematical Society*, **4**, pp. 29-53.

________. (1908) **"Mathematical logic as based on the theory of types"**. in *American Journal of Mathematics,* 30: 222-62.

________. (1919) **Introduction to Mathematical Philosophy**. London: Allen & Unwin.

________. (1958) **My philosophical development**. London: Unwin.

________. (1998) **Autobiography**. London: Unwin.

SAINSBURY, Richard (2009) **Paradoxes**. 3rd Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

SCHINEIDER, Christina (2007) **"Totalidades: um problema lógico-metafísico"**, *in*: IMAGUIRE, Guido (*et al*) (2007), pp. 123-34.

SHAPIRO, Stewart. (1991) **Foundations witthout foundationalism**. Oxford: Oxford University Press.

________. (2000) **Thinking about mathematics**. Oxford: Oxford University Press.

SHAPIRO, Stewart. (Ed.) (2005) **The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic**. Oxford: Oxford University Press.

SHAPIRO, Stewart &. WRIGHT, Crispin. (2006) **"All things indefinitely extensible"**, in: RAYO & UZQUIANO, 2006, pp. 255-304.

SHER, G. & TIESZEN, R. (eds), **Between Logic and Intuition**: essays in honor of Charles Parsons. New York: Cambridge University Press.

SKOLEM, Thoralf. (1922) **"Some remarks on axiomatized set theory"**, in van HEIJENOORT (1967a), pp. 291-301.

SMULLYAN, Raymond (2002) **Lógica de primeira ordem**. São Paulo: UNESP/Discurso Editorial.

SMULLYAN, Raymond & FITTING, Melvin. (1966) **Set theory and the continuum problem**. New York: Dover Publications.

STALNAKER, Robert C. (2003) **Ways a World Might Be: Metaphysical and Anti-Metaphysical Essays**. Oxford: Clarendon Press.

SUPPES, Patrick. (1972) **Axiomatic set theory**. New York: Dover Publications Inc.

TARSKI, Alfred (1933) **"O conceito de verdade nas linguagens formalizadas"**. Trad. de Cezar Mortari, *in A concepção semântica de verdade*: textos clássicos de Tarski. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

UZQUIANO, Gabriel. (2009) **"Quantification without a domain"**. *in* BUENO, O. & LINNEBO, Ø., 2009, pp. 300-23.

__________. (2014) **"Quantifiers and Quantification"**, in: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponível *on line* em: http://plato.stanford.edu/entries/quantification/. Último acesso em: 02/10/2014.

van HEIJENOORT, J. (ed.) (1967a) **From Frege to Gödel**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

________________. (1967b) **"Logic as calculus and logic as language"**, *Synthese* **17**, pp. 324-30.

van INWAGEN, Peter. (2001) **Ontology, Identity, and Modality**: essays in metaphysics. Cambridge: Cambridge University Press.

_____________. (2002) **"'Carnap' and 'the Polish Logician'"**. *Acta Analytica*, volume 17- Issue 28, pp. 7-17.

VELLEMAN, Daniel J. (2006) **How to prove it**. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press.

WEBER, Zach. (2012) **"Transfinite cardinals in paraconsistent set theory"**, The Review of Symbolic Logic, v.5, N. 2, pp. 269-293.

WEYL, Hermann (1949) **Philosophy of Mathematics and Natural Science**. Princeton: Princeton University Press.

WIELAND, Jan Willem. (2003) **"Infinite Regress Arguments"**, *Acta Analytica* **28**, pp. 95-109.

WILLIAMSON, Timothy (2003) **"Everything"**, *Philosophical Perspectives* **17**, pp. 415-65.

____________. (2006) **"Absolute identity and absolute generality"**, RAYO & UZQUIANO, 2006, pp. 369-389.

WITTGENSTEIN, Ludwig. (1964) **Philosophical Remarks**. Oxford: Blackwell.

______________. (1967) **Fichas** (*Zettel*). Lisboa: Edições 70.

______________. (1978) **Remarks on the foundations of mathematics**. 3rd edition. Oxford: Basil Blackwell.

______________. (1994) **Tractatus Logico-Philosophicus**. Trad. de Luiz Henrique L. dos Santos. São Paulo: EDUSP.

______________. (2008) **Investigações Filosóficas**. Petrópolis: Editora Vozes.

WRIGHT, Crispin. (1980) **Wittgenstein on the foundations of mathematics**. London: Duckworth.

YABLO, Stephen. (1993) **"Paradox without self-reference"**, *Analysis* 53 (4): 251-252.

ZERMELO, Ernst. (1908) **"Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I"**, *Math. Ann.* **65**, pp. 107-28.