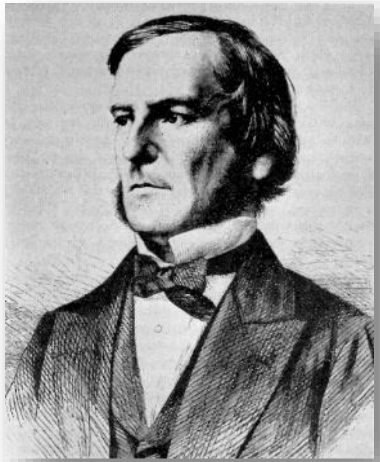
LÓGICA I

UFAM

ANDRÉ PONTES



4.

Lógica Proposicional

A Linguagem da Lógica Proposicional

Letras Proposicionais: P, Q, R, S, T, ...

Conectivos Lógicos:

Conectivo	Leitura	Símbolo	Símbolos alternativos
Negação	"não ..." "não é o caso que ..."	$\neg$	$\sim$
Conjunção	"... e ..."	$\wedge$	& .
Disjunção	"... ou ..."	$\vee$	
Implicação/Condicional	"Se ..., então ..."	$\rightarrow$	$\supset$
Bi-implicação/Bicondicional	"... se e, somente se, ..."	$\leftrightarrow$	$\equiv$

Símbolos auxiliares: (,), =

Definindo recursivamente fórmulas bem formadas (fbf)

F_0 Toda letra proposicional é uma fbf.

F_1 Se α é uma fbf, então não $\neg\alpha$ é uma fbf.

F_2 Se α e β são fbf, então $\alpha\wedge\beta$ é uma fbf.

F_3 Se α e β são fbf, então $\alpha\vee\beta$ é uma fbf.

F_4 Se α e β são fbf, então $\alpha\rightarrow\beta$ é uma fbf.

F_5 Se α e β são fbf, então $\alpha\leftrightarrow\beta$ é uma fbf.

F_6 Nada mais é uma fbf.

4.1
Tabelas de Verdade

Tabelas de verdade

Negação (¬): "não ..."

α	$\neg\alpha$
1	0
0	1

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

Tabelas de verdade

Conjunção (∧): "… e …"

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabelas de verdade

Disjunção ($\vee$): "... ou ..."

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

α	β	$\alpha\vee\beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabelas de verdade

Implicação/Condicional ($\rightarrow$): “Se ..., então ...”

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabelas de verdade

Justificando [F⟶V] resultar em verdade:

- **Uma aplicação na aritmética**

Definição: Primo é todo aquele número que só é divisível por ele mesmo e por 1.

$\forall n\ (n$ é primo $\longrightarrow n \geq 2)$

1 é primo $\longrightarrow$ $1 \geq 2$ [F⟶F] V

4 é primo $\longrightarrow$ $4 \geq 2$ [F⟶V] V

- A implicação lógica expressa condição suficiente, mas não necessária.

Se um dado animal é uma baleia, então ele é um mamífero.

- Podemos ainda provar por equivalência: $P \longrightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

Aplicando a interpretação P(F) e Q(V), obtemos V para ambas as sentenças. O resultado pode ser verificado via tabelas de verdade.

Tabelas de verdade

Bicondicional/Bi-implicação (↔): "... se, somente se, ..."

↔	0	1
0	1	0
1	0	1

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Valorações booleanas

Uma valoração sobre o conjunto de todas as fórmulas da lógica proposicional é dita uma valoração booleana, caso quaisquer fórmulas α e β do conjunto em questão satisfaçam as seguintes regras:

1. Uma fórmula $\neg\alpha$ recebe o valor V, caso α receba o valor F; e recebe o valor F, caso α receba o valor V.
2. Uma fórmula $\alpha \wedge \beta$ recebe o valor V, apenas caso α e β recebam ambas o valor V; em caso contrário, $\alpha \wedge \beta$ recebe o valor F.
3. Uma fórmula $\alpha \vee \beta$ recebe o valor V, caso pelo menos umas das duas fórmulas, α ou β, receba valor V; em caso contrário, $\alpha \vee \beta$ recebe o valor F.
4. Uma fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ recebe o valor F, quando α e β recebem, respectivamente, os valores V e F; em caso contrário, $\alpha \rightarrow \beta$ recebe o valor V.
5. Uma fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ recebe o valor V casos ambas as fórmulas, α e β, recebam o mesmo valor; em caso contrário, $\alpha \leftrightarrow \beta$ recebe valor F.

Exercício: completude vero-funcional

1. Prove que:

a) $\land$ é definível a partir de $\{\neg, \lor\}$

b) $\rightarrow$ é definível a partir de $\{\neg, \land\}$

c) $\rightarrow$ é definível a partir de $\{\neg, \lor\}$

d) $\land$ é definível a partir de $\{\neg, \rightarrow\}$

e) $\lor$ é definível a partir de $\{\neg, \rightarrow\}$

f) $\leftrightarrow$ é definível a partir de $\{\land, \rightarrow\}$

Um par de conectivo é dito completo vero-funcionalmente, caso ele possa expressar as funções de verdade de todos os outros conectivos além deles. Sendo assim,

2. Prove que os pares $\{\neg, \land\}$, $\{\neg, \lor\}$ e $\{\neg, \rightarrow\}$ são completos vero-funcionalmente.

3. Prove que o par $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *não* é completo vero-funcionalmente.

Aplicação: Lógica de Circuitos

Circuito conjuntivo (∧):

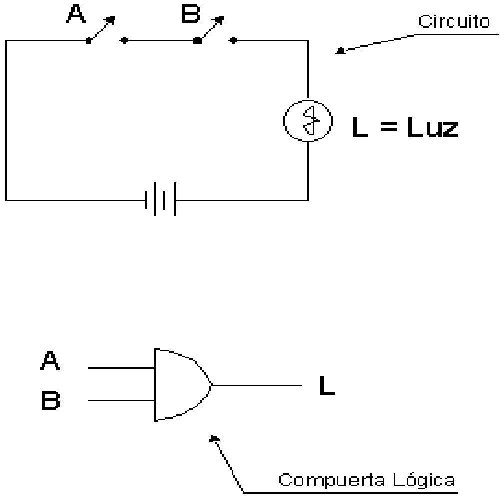
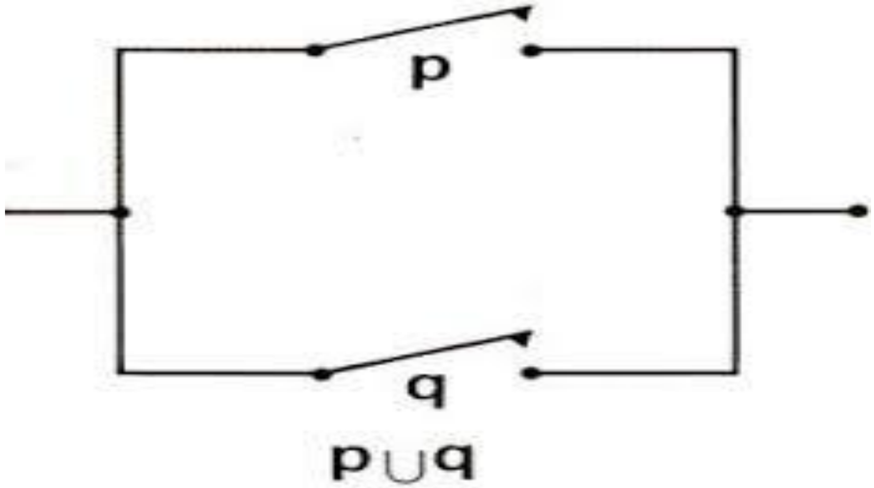
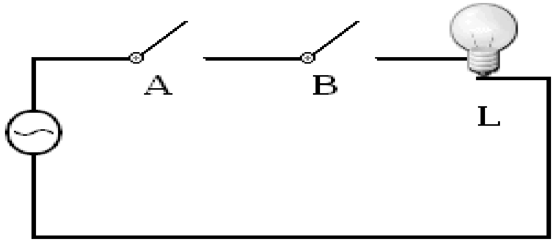


Tabla de Verdad

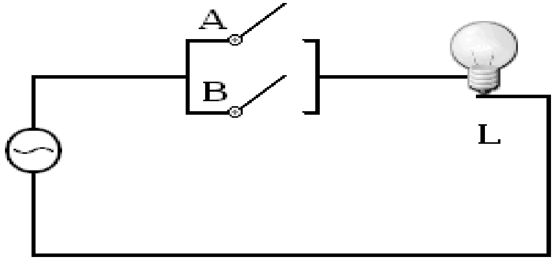
A	B	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Circuito disjuntivo (∨):





Conmutadores en serie



Conmutadores en paralelo

4.2
Regras de Inferência: Dedução Natural

Negação (¬)

Dupla Negação (DN)

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \qquad\qquad \frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

Conjunção ($\wedge$)

Eliminação da Conjunção (E-$\wedge$)

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

Introdução da Conjunção (I-$\wedge$)

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \\ \beta\end{array}}{\alpha \wedge \beta}$$

Disjunção (∨)

Eliminação da Disjunção (E-∨)

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \neg\alpha}{\beta}$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \neg\beta}{\alpha}$$

Introdução da Disjunção (I-∨)

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$

Implicação (→)

Modus Ponens (MP):

$$\frac{\begin{matrix}\alpha\to\beta \\ \alpha\end{matrix}}{\beta}$$

Modus Tollens (MT):

$$\frac{\begin{matrix}\alpha\to\beta \\ \neg\beta\end{matrix}}{\neg\alpha}$$

Condicionalização (Cond.):

$$\frac{\beta}{\alpha\to\beta}$$

Bi-implicação/Bicondicional (↔)

Eliminação da Bi-implicação (E-↔)

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$

Introdução da Bi-implicação (I-↔)

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \rightarrow \beta \\ \beta \rightarrow \alpha\end{array}}{\alpha \leftrightarrow \beta}$$

Redução ao Absurdo (RA)

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \\ \vdots \\ \beta \land \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}$$

4.2

Tablôs Semânticos

Regras do Tablô

Negação

$$\begin{array}{c} \neg\alpha \; V \\ | \\ \alpha \; F \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\alpha \; F \\ | \\ \alpha \; V \end{array}$$

Regras do Tablô

Conjunção

$\alpha \wedge \beta \; V$

$\alpha \; V$

$\beta \; V$

$\alpha \wedge \beta \; F$

$\alpha F \qquad \beta \; F$

Regras do Tablô

Disjunção

$$\alpha \lor \beta \ \mathit{V}$$

$$\alpha \ \mathit{V} \qquad \beta \ \mathit{V}$$

$$\alpha \lor \beta \ \mathit{F}$$

$$\alpha \ \mathit{F}$$

$$\beta \ \mathit{F}$$

Regras do Tablô

Implicação (Condicional)

$\alpha \to \beta$ *V*

α *F* $\qquad$ β *V*

$\alpha \to \beta$ *F*

α *V*

β *F*

Regras do Tablô

Bi-implicação (Bi-condicional)

$\alpha \leftrightarrow \beta$ *V*

α *V*	α *F*
β *V*	β *F*

$\alpha \leftrightarrow \beta$ *F*

α *V*	α *F*
β *F*	β *V*