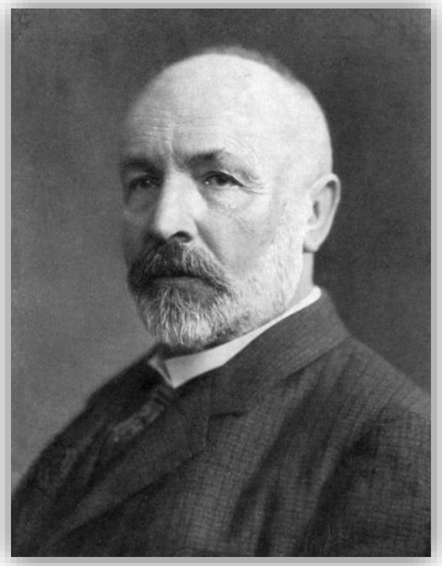
LÓGICA I

UFAM

ANDRÉ PONTES



3.

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Introduzindo Conjuntos

Um conjunto é uma coleção ou um agregado de objetos.

Ex.: O conjunto das vogais; O conjuntos de pessoas na sala; O conjunto de números naturais; dentre outros.

A relação entre um conjuntos e os objetos que o compõem caracteriza a relação de pertinência ($\in$). Seja A com conjunto e *a* um de seus elementos, dizemos que:

$$a \in A$$

A relação de pertinência é um ***primitivo***, ou seja, é não definível. Ela é a base de definição de todas as outras noções da teoria dos conjuntos.

Axioma da extensionalidade

$$A=B \leftrightarrow \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B\}$$

Definição intensional e extensional

- Uma **definição intensional** de um conjunto é dada pela propriedade que seleciona os membros de um conjunto em questão:

V = {x / x é uma vogal}

B = {x / x é músico dos Beatles}

- Uma **definição extensional** de um conjunto é dada por intermédio de uma lista exaustiva dos membros do conjunto em questão.

V = {a, e, i , o, u}

B = {George Harrison; Ringo Star; Paul McCartney; John Lennon}

- **Cardinalidade:** consiste no número de elementos que um conjunto possui.

OBS.: É possível determinar se dois conjunto possuem a mesma cardinalidade mesmo não sabendo qual o número de elementos cada um possui. Basta verificar se há uma correspondência biunívoca (um-a-um) entre seus elementos.

Correlacionando intensões a extensões

- Toda condição [ou propriedade] determina um conjunto cujos membros são apenas aqueles itens que satisfazem a condição [ou propriedade] em questão:

Princípio ingênuo da compreensão

$$\forall x \exists y \, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$$

O princípio da compreensão foi posteriormente refutado pelo Paradoxo de Russell!

Alguns conjuntos especiais

- **Conjunto unitário:** um conjuntos com apenas um membro.

Ex.: {1}; G = {x / x é o autor de Cem Anos de Solidão};

- **Conjunto vazio:** o conjunto que não possui nenhum elemento. Usa-se os símbolos "$\varnothing$" ou "{ }" para representar o conjunto vazio.
- **Conjunto Universo:** pode-se falar de duas formas do conjunto universo, a saber, uma *absoluta* e outra *relativa*.

Em termos absolutos o conjunto o universo é o conjunto de absolutamente tudo o que há. Não há nada que não pertença a ele. Em termos relativos, ele é entendido como o domínio ou universo do discurso.

- **Conjuntos numéricos:** conjunto dos naturais; conjuntos dos inteiros; conjunto dos pares; conjunto dos ímpares...
- **Conjuntos infinitos:** um conjunto é dito infinito quando seus elementos estão em uma relação biunívoca com os elementos de um subconjunto próprio.
- **Conjuntos finitos:** quando seus elementos não estão em uma relação biunívoca com os elementos de um subconjunto próprio.

3.1 Algumas operações com conjuntos

Continência de conjuntos ($\subset$)

Um conjunto A está contido em um conjunto B se todo elemento de A é também um elemento de B.

$$A \subset B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

*Quando um conjunto A está contido em B, dizemos que A é um **subconjunto** de B!

Alguns teoremas:

$A \subset A$ [Todo conjunto está contido em si mesmo. Tudo conjunto é subconjunto de si mesmo]

$A = B \leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$

$(A \subset B \wedge B \subset C) \rightarrow A \subset C$

IMPORTANTE:

- A relação de continência de conjuntos é sempre uma relação entre conjuntos!
- Quando um conjunto C é subconjunto de um conjunto D, mas não é idêntico a ele, dizemos que C é um subconjunto próprio de D.

União de conjuntos ($\cup$)

A união de dois conjuntos A e B quaisquer é um conjunto que possui como membros apenas elementos de A ou elementos de B.

$$\mathbf{A \cup B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \vee x \in B)}$$

Alguns teoremas:

$A \cup A = A$ [idempotência]

$A \cup \varnothing = A$

$A \cup B = B \cup A$ [comutatividade]

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ [associatividade]

$A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$

Grande União: A grande união de um conjunto C cujos membros são também conjuntos, é o conjunto formado por tudo que é elemento de pelo menos um dos conjuntos que são membros de C.

$$\cup C = \{x \mid x \in A \wedge A \in C\}$$

Interseção de conjuntos ($\cap$)

A interseção de dois conjuntos A e B quaisquer é um conjunto que possui como membros apenas os elementos que pertençam a ambos os conjuntos, A e B.

$$\mathbf{A \cap B \leftrightarrow \forall x (x \in A \wedge x \in B)}$$

Alguns teoremas:

$A \cap A = A$

Grande Interseção: A grande interseção de um conjunto C cujos membros são também conjuntos, é o conjunto formado por tudo que é elemento de todos os conjuntos que são membros de C.

$\cap C = \{x \,/\, x \in \alpha, \forall \alpha \,(\alpha \in C)$ * Onde α é uma variável para conjuntos.

Complemento de um conjunto ($\overline{X}$)

O complemento de um conjunto A é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao universo do discurso e não pertencem a A.

$$\overline{A} = \{ x \mid x \in U \land x \notin A \}$$

Alguns teoremas:

$X \cup \overline{X} = U$

$X \cap \overline{X} = \varnothing$

Conjunto diferença (A - B)

A diferença entre um conjunto A e um conjunto B é o conjunto que tem como membros todas aqueles itens que são elementos de A, mas não são elementos de B.

$$\mathbf{A - B = \{\ x\ /\ x \in A \land x \notin B\}}$$

Alguns teoremas:

Produto cartesiano (AxB)

O produto cartesiano de dois conjuntos

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle / \ x \in A \land y \in B \}$$

Alguns teoremas:

Conjunto Potência ($\wp$)

O conjunto potência de um conjunto A é o conjunto dos subconjuntos de A

$$\wp(A) = \{\, x \,/\, x \text{ é um subconjunto de } A\}$$

ex.: Se A = {1, 2, 3}, então $\wp(A) = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}; \varnothing\}$

Teorema de Cantor: Dado qualquer conjunto A, não há uma correspondência biunívoca entre A e $\wp(A)$.

A relação de cardinalidade entre um conjunto e seu conjunto potência é dada pela seguinte fórmula:

$|\wp(A)| = 2^n$, onde $n = |A|$

IMPORTANTE: Isso põe um obstáculo ao conjunto universo (**U**). Se tal conj. existe, então $|\wp(\mathbf{U})| > |\mathbf{U}|$, o que seria um absurdo!

Aplicações em Filosofia

- **Indivíduos ou objetos podem ser entendidos enquanto conjuntos de propriedades.**
- **Interseção e as noções filosóficas de espécie; tipo natural; substância segunda.**

Uma espécie S é definida como um agregado de indivíduos que compartilham um conjunto C de propriedades características. Se cada indivíduo for descrito como um agregado de propriedades co-instanciadas, então uma espécie S pode ser definida como o conjunto de indivíduos cuja a interseção de suas propriedades instanciadas tenha como subconjunto o conjunto C.

- **Axioma da Extensionalidade e os Princípios de Identidade de Leibniz [Discurso de Metafísica]**

Princípio de Identidade dos Indiscerníveis.......................... $\forall x \forall y \, ((Fx \leftrightarrow Fy) \rightarrow x = y)$

Princípio de Indiscernibilidade dos Idênticos.................. $\forall x \forall y \, (x = y \rightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$

Axioma da Extensionalidade.. $A = B \leftrightarrow \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

- **A diferença entre "$\in$" e "$\subset$" e a metafísica de propriedades.**

"$\in$" expressa a relação de satisfação de uma propriedade por indivíduo, ao passo que "$\subset$" expressa uma relação entre extensões de propriedades.

3.2 Sobre conjuntos numéricos e os infinitos de diferentes tamanhos

Infinitos enumeráveis

Dizemos que um conjunto é infinito enumerável, caso seus elementos possam ser postos numa relação biunívoca – correspondência um-a-um – como os números naturais.

$\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}

$\mathbb{N}_í$ = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...}

$\mathbb{N}_p$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...}

$\mathbb{Z}$ = { ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

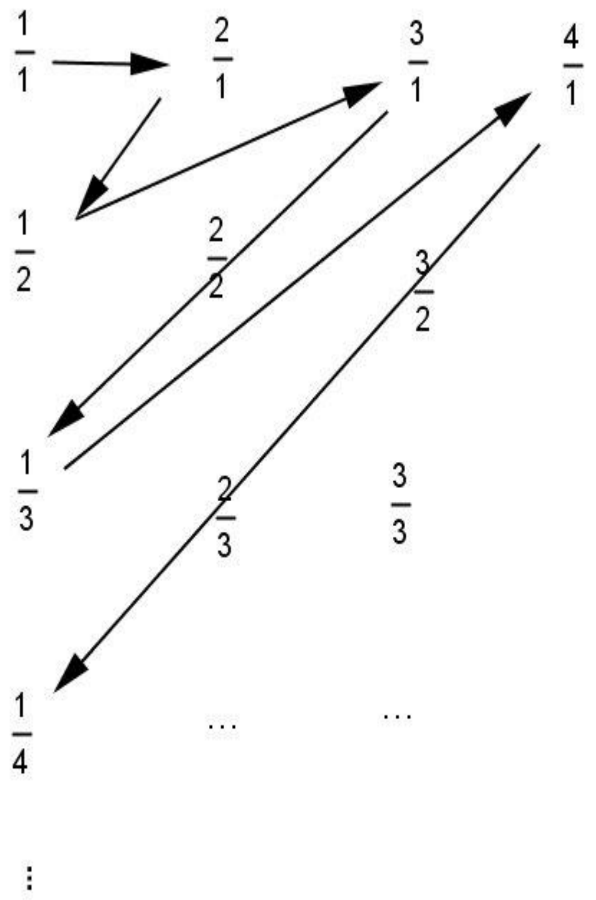
$\mathbb{Z}$ = {0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...}

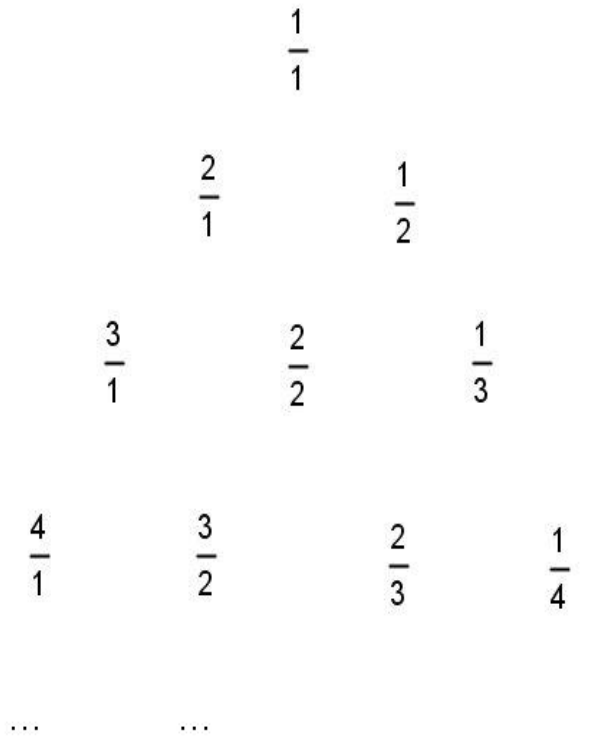
A enumerabilidade dos racionais

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,/\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \ldots\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$





A não enumerabilidade dos irracionais (reais)

$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
0	0,4838274932...
1	0,1392053124...
2	0,2367845621...
3	0,7632134296...
4	0,3253897543...
$\vdots$	

0.43628... nº diagonal

0.54739... nº anti-diagonal (+1)

- Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ são ambos infinitos, mas a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é maior que a de $\mathbb{N}$.
- Há infinitos de diferentes tamanhos!
- Sobre a cardinalidade de conjuntos infinitos:

A cardinalidade dos naturais é $\aleph_0$. A cardinalidade dos reais é $\aleph_1$. Sendo que $\aleph_1 > \aleph_0$

- **Hipótese do contínuo:** a cardinalidade dos reais é a menor cardinalidade maior que a cardinalidade dos naturais.

O Paradoxo de Russell

Em tese, há conjuntos que pertencem a si mesmos e conjuntos que não pertencem a si mesmos. Por exemplo, dados os conjunto A e B abaixo:

A = { x / x é um conj. com mais de três elemento}   B = { x / x é vencedor da Medalha Fields]

Então, temos que: $A \in A$, mas $B \notin B$

Definimos intensionalmente o conjunto R – de Russell – da seguinte forma: $\boxed{R \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \,/\, x \notin x\}}$

(1) $\forall x \exists y\, (x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$ princípio da compreensão

(2) $\forall x\, (x \in R \leftrightarrow x \notin x)$

(3) $R \in R \leftrightarrow R \notin R$

(4) $(R \in R) \wedge (R \notin R)$ contradição!

O paradoxo de Russell: sobre barbeiros e o Pinóquio!